FONCTION EXPONENTIELLE

I DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, on en déduit que pour tout réel k l'équation $\ln(x)=k$ admet une solution unique a dans l'intervalle $]0;+\infty[$

x	0		a		$+\infty$
$\ln(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	k	$\nearrow$	$+\infty$

Cette propriété, permet de définir une nouvelle fonction « réciproque » de la fonction logarithme népérien.

1 DÉFINITION

La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe associe le réel y strictement positif tel que :

$$y=\exp(x) \iff x=\ln(y)$$

NOTATION

Pour tout entier relatif n, $\ln\left(\mathrm{e}^n\right)=n$. Ainsi, pour tout entier relatif n, $\exp(n)=\mathrm{e}^n$. On convient d'étendre cette écriture à tout réel x.
C'est à dire que pour tout réel x, on écrit $\exp(x)=\mathrm{e}^x$. e^x se lit donc « exponentielle de x ».

2 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Les propriétés suivantes se déduisent de la définition :

- Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x>0$.
- Pour tout réel x et pour tout réel $y>0$, $y=\mathrm{e}^x \iff x=\ln(y)$.
- Pour tout réel x, $\ln\left(\mathrm{e}^x\right)=x$.
- Pour tout réel $x>0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)}=x$.

EXEMPLES

$\ln(1)=0 \iff \mathrm{e}^0=1$; $\mathrm{e}^x=3 \iff x=\ln 3$; L'équation $\mathrm{e}^x=0$ n'a pas de solution.

II PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

1 EXPONENTIELLE D'UNE SOMME

Pour tout réel a et pour tout réel b

$$\mathrm{e}^{a+b}=\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b$$

✻ DÉMONSTRATION

Pour tout réel a et pour tout réel b, e^{a+b}, e^a et e^b sont des réels strictement positifs.
Nous avons, d'une part, $\ln\left(\mathrm{e}^{a+b}\right)=a+b$.
D'autre part, $\ln\left(\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b\right)=\ln\left(\mathrm{e}^a\right)+\ln\left(\mathrm{e}^b\right)=a+b$
Donc $\ln\left(\mathrm{e}^{a+b}\right)=\ln\left(\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b\right) \iff \mathrm{e}^{a+b}=\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b$

2 AUTRES PROPRIÉTÉS

1. Pour tout réel a, $\mathrm{e}^{-a}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}$
2. Pour tout réel a et pour tout réel b, $\mathrm{e}^{a-b}=\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{b}}$
3. Pour tout réel a et pour tout entier relatif n, $\mathrm{e}^{na}=(\mathrm{e}^{a})^{n}$

Démonstrations

1. Pour tout réel a, $\mathrm{e}^{a}\times\mathrm{e}^{-a}=\mathrm{e}^{0}=1$ donc $\mathrm{e}^{-a}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}$
2. Pour tout réel a et pour tout réel b, $\mathrm{e}^{a-b}=\mathrm{e}^{a}\times\mathrm{e}^{-b}=\mathrm{e}^{a}\times\dfrac{1}{\mathrm{e}^{b}}=\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{b}}$
3. Pour tout réel a et pour tout entier relatif n, $\ln(\mathrm{e}^{na})=na$ et $\ln(\mathrm{e}^{a})^{n}=n\ln(\mathrm{e}^{a})=na$
   Donc $\ln(\mathrm{e}^{na})=\ln(\mathrm{e}^{a})^{n} \iff \mathrm{e}^{na}=(\mathrm{e}^{a})^{n}$

EXEMPLES

$\mathrm{e}^{2+\ln 3}=\mathrm{e}^{2}\times\mathrm{e}^{\ln 3}=3\mathrm{e}^{2}$; $\quad \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x-2}}=\mathrm{e}^{-(x-2)}=\mathrm{e}^{2-x}$; $\quad \dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{x}}=\mathrm{e}^{2x+1-x}=\mathrm{e}^{x+1}$; $\quad \mathrm{e}^{2x}\times\mathrm{e}^{2}=\left(\mathrm{e}^{x+1}\right)^{2}$

III ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

1 DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

DÉRIVÉE

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x)=\exp(x)$

VARIATION

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
Or pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x}>0$. On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CONSÉQUENCES

Pour tout réel x et pour tout réel y,

$$\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{y} \iff x=y \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{x}<\mathrm{e}^{y} \iff x<y$$

2 LIMITES

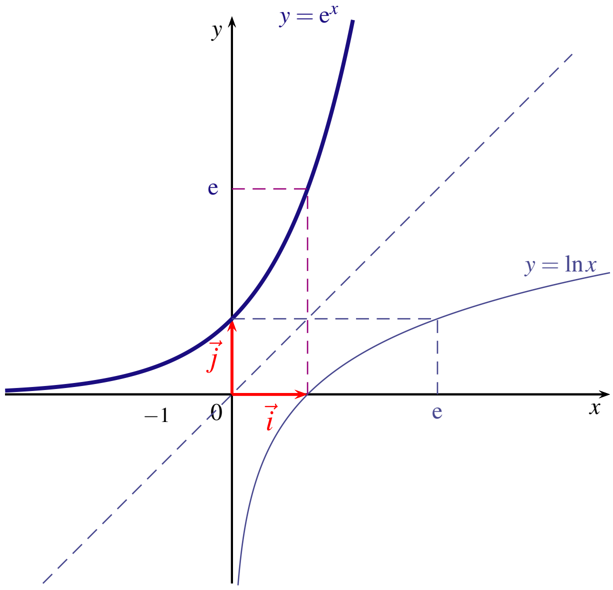
$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

3 COURBE REPRÉSENTATIVE

— $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle en $-\infty$.

— La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



4 CROISSANCES COMPARÉES

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

Pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

On peut résumer cette propriété à l'aide de la règle opératoire :
En $+\infty$, l'exponentielle de x l'emporte sur toutes les puissances de x

FONCTION EXPONENTIELLE

IV EXPONENTIELLE D'UNE FONCTION : $\exp(u)$

On considère une fonction u définie sur un intervalle I.
La fonction $f=\exp(u)$ est la composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle notée également $f=\mathrm{e}^u$.

1 LIMITES

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. α désigne soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$.

— Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=-\infty$ alors, $\lim\limits_{x\to\alpha} \mathrm{e}^{u(x)}=0$.

— Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=+\infty$ alors, $\lim\limits_{x\to\alpha} \mathrm{e}^{u(x)}=+\infty$.

— Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=b$ avec b réel alors, $\lim\limits_{x\to\alpha} \mathrm{e}^{u(x)}=\mathrm{e}^b$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x-1}}$.

1. $\lim\limits_{x\to1^+} x-1=0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to1^+} x-\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ et comme $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X=0$ on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to1} \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x-1}}=0}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X=+\infty$ donc par composition des limites $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x-1}}=+\infty}$

2 DÉRIVÉE

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)'=u'\times\mathrm{e}^u$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{x^2-1}$.
La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=2x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\boxed{f'(x)=2x\mathrm{e}^{x^2-1}}$

3 VARIATION

Les fonctions u et e^u ont les mêmes variations sur l'intervalle I.

Démonstration

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par composée :

— si la fonction u est croissante sur I, alors la fonction e^u est croissante sur I ;

— si la fonction u est décroissante sur I, alors la fonction e^u est décroissante sur I.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{1-2x}$.
f est la composée de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=1-2x$ suivie de la fonction exp.
Or la fonction u est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

FONCTION EXPONENTIELLE

EXERCICE 1

Simplifier les écritures suivantes :

$A=\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-2x}}$; $\quad B=\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}-\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}$; $\quad C=\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)$; $\quad D=\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{1-x}}$.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

 a) $\mathrm{e}^{x^{2}+x-1}=1$ $\quad$ b) $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+5}}{\mathrm{e}^{3-2x}}=\mathrm{e}^{2x^{2}-1}$ $\quad$ c) $2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-1=0$

 d) $\ln\left(\mathrm{e}^{x+1}\right)=\mathrm{e}^{x+1}+x$

EXERCICE 3

Quand l'oreille humaine est soumise à une intensité acoustique, exprimée en watts par mètre carré $\left(\mathrm{W}/\mathrm{m}^{2}\right)$, le niveau sonore du bruit responsable de cette intensité acoustique est exprimé en décibels (dB).

Échelle de bruit

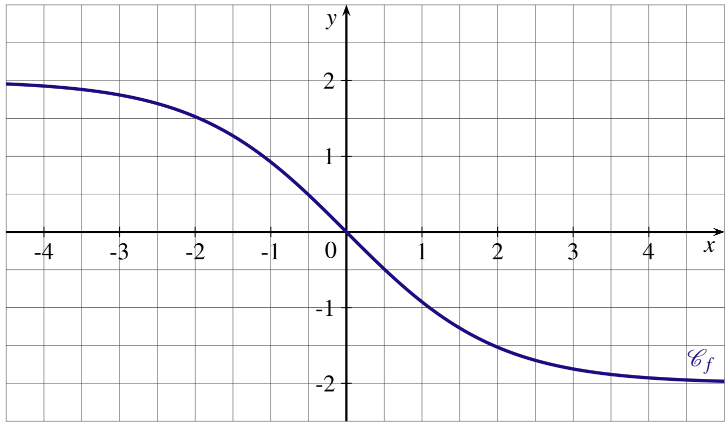
Sources sonores	Intensité acoustique $\left(\mathrm{W}/\mathrm{m}^{2}\right)$	Niveau sonore (dB) arrondi éventuellement à l'unité	Sensation auditive
Décollage de la Fusée Ariane	10^{6}	180	Exige une protection spéciale
Turboréacteur	10^{2}	140	
Course de Formule 1	10	130	
Avion au décollage	1	120	Seuil de douleur
Concert et discothèque	10^{-1}	110	Très difficilement supportable
Baladeur à puissance maximum	10^{-2}	100	
Moto	10^{-5}	70	Pénible à entendre
Voiture au ralenti	10^{-7}	50	Bruit courant
Seuil d'audibilité	10^{-12}	0,08	Silence anormal

1. D'après le tableau, lorsque l'intensité acoustique est multipliée par 10, quelle semble être l'augmentation du niveau sonore ?
2. La relation liant l'intensité acoustique x où x appartient à l'intervalle $\left[10^{-12};10^{6}\right]$ et le niveau sonore est donnée par :
$$f(x)=\frac{10}{\ln 10}\times\ln(x)+120.$$
 On pourra prendre $\dfrac{10}{\ln 10}\approx 4{,}34$.
 a) Vérifier la conjecture émise à la question 1.
 b) Quel serait le niveau sonore de deux motos ?
3. Pour éviter tout risque sur la santé, le port d'un casque de protection acoustique est donc conseillé au delà de 85 dB.
 Déterminer l'intensité acoustique à partir de laquelle le port d'un tel casque est conseillé.

FONCTION EXPONENTIELLE

EXERCICE 4

On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^x} - 2$.



1. a) Calculer $f(-\ln 7)$ et $f(\ln 3)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. La courbe C_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?
3. a) On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\ln 3$.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$. On note f' la dérivée de la fonction f.

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 2$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{3-2x}{\mathrm{e}^x}$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = (2x-5) \times \mathrm{e}^{-x}$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4-x)\mathrm{e}^x - 2$.

1. a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) La courbe C_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?
2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.