FONCTION DÉRIVÉE : ÉTUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

1. Fonction dérivée

1.1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant, pour tout x de l'intervalle I, un nombre dérivée $f'(x)$.

La fonction qui, à tout x de l'intervalle I associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f est appelée **fonction dérivée de f** : elle est notée **f'**.

1.2. Fonctions dérivées des fonctions élémentaires

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a et b deux nombres réels donnés :

Fonction f	**Dérivée f'**	Ensemble de définition I :
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$

1.3. Règles de dérivation

Soient f et g deux fonctions admettant sur l'intervalle I des dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$.
Soit a un nombre réel donné.
Dans ces conditions, pour tout x de I on a :

Fonction	**Dérivée**
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$a.f(x)$	$a.f'(x)$

2. Études de fonction à l'aide de la dérivée

2.1. Sens de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et admettant sur cet intervalle une dérivée $f\,'$

- Si pour tout x de $[a\ ;\ b]$ on a $\boldsymbol{f\,'(x) > 0}$,
  alors la fonction f est **croissante** sur $[a\ ;\ b]$.

x	a	b
$f\,'(x)$	+	
f	↗	

- Si pour tout x de $[a\ ;\ b]$ on a $\boldsymbol{f\,'(x) < 0}$,
  alors la fonction f est **décroissante** sur $[a\ ;\ b]$.

x	a	b
$f\,'(x)$	–	
f	↘	

- Si pour tout x de $[a\ ;\ b]$ on a $\boldsymbol{f\,'(x) = 0}$, alors la fonction f est **constante** sur $[a\ ;\ b]$.

2.2. Extremums

Si la dérivée **s'annule** **<u>en changeant de signe</u>** en un point x_0, alors la fonction admet un extremum en x_0. Un extremum est un **minimum** ou un **maximum**.

- Si l'on obtient un tableau du type ci-dessous :

x	a		x_0		b
$f\,'(x)$		–	0	+	
f		↘	$f(x_0)$	↗	

la fonction f possède pour x_0 un **minimum** égal à $f(x_0)$

- Si l'on obtient un tableau du type ci-dessous :

x	a		x_0		b
$f\,'(x)$		+	0	–	
f		↗	$f(x_0)$	↘	

la fonction f possède pour x_0 un **maximum** égal à $f(x_0$