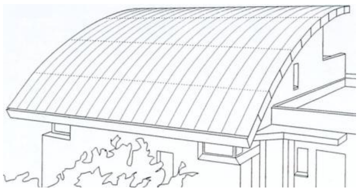
FONCTION DÉRIVÉE : ÉTUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

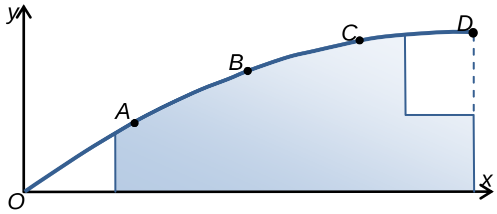
1. Fonction dérivée

ACTIVITE 1 « Étanchéité d'une toiture »



La toiture d'un bâtiment est couverte par des plaques de cuivre. Pour des problèmes d'étanchéité, le recouvrement de ces plaques ne peut se faire que pour une inclinaison supérieure à un angle donné en fonction de la région où se trouve ce bâtiment. **On se propose d'étudier la forme de la section du toit afin de déduire la variation de son inclinaison. On pourra alors valider ou invalider la conformité du recouvrement.**

La partie inférieure du toit est prise comme origine des axes. La section droite du toit est un arc de parabole $\overset{\frown}{OD}$ passant par les points *A*, *B*, *C*, points de recouvrement des plaques de la toiture.
On donne : *A* (2 ; 1,35), *B* (4 ; 2,3), *C* (6 ; 2,85) et *D* (8 ; 3).
L'unité de longueur est le mètre.



☐**1.** Soit *f* la fonction définie sur [0 ; 8] dont la représentation graphique est la parabole passant par les points *A*, *B*, *C* et *D*.
Son expression est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$. Utiliser le mode statistique de la calculatrice pour déterminer l'équation de cette parabole : $f(x)$ = ...

☐**2.a.** Tracer à la calculatrice la représentation graphique de *f*.

b. Utiliser la calculatrice pour déterminer les **nombres dérivés** de la fonction *f* aux abscisses suivants :

x	0	2	4	6	8
Nombre dérivé $f'(x)$					

c. Quelle est la signification de ces nombres dérivés ? (cocher la bonne réponse)
❍ C'est l'ordonnée à l'origine de la tangente à la fonction au point d'abscisse considéré.
❍ C'est le coefficient directeur de la tangente à la fonction au point d'abscisse considéré
❍ C'est l'ordonnée à l'origine de la perpendiculaire à la fonction au point d'abscisse considéré.
❍ C'est le coefficient directeur de la perpendiculaire à la fonction au point d'abscisse considéré

☐**3.** Soit *g* la fonction définie sur [0 ; 8] par $g(x) = –0{,}10x + 0{,}775$.

a. Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau de valeurs de la fonction *g* suivant :

x	0	2	4	6	8
$g(x)$					

b. Conjecturer un lien entre la fonction *g* et les nombres dérivés de la fonction *f*.
....

c. Quelle doit-être la valeur du nombre dérivé pour avoir une tangente horizontale ? ....

d. Résoudre l'équation $g(x) = 0$, c'est-à-dire $–0{,}10x + 0{,}775 = 0$ ....
....

e. En déduire en quelle abscisse la fonction *f* admet une tangente horizontale. ....

f. De façon générale, à quel endroit une parabole admet-elle une tangente horizontale ? ....

g. Le point *D* est-il le point le plus haut du toit ? Justifier la réponse. ....
....

☐**4.** Les panneaux de cuivre de la partie supérieure de la toiture ont pour longueur l'arc $\overset{\frown}{CD}$. Pour des problèmes d'étanchéité, le recouvrement de ces panneaux ne peut se faire que si la pente au point de raccordement *C* est suffisante. Pour la région considérée, l'angle α entre le toit et le plan horizontal doit être supérieur à 13°. La tangente de l'angle α est égale à $g(x)$.

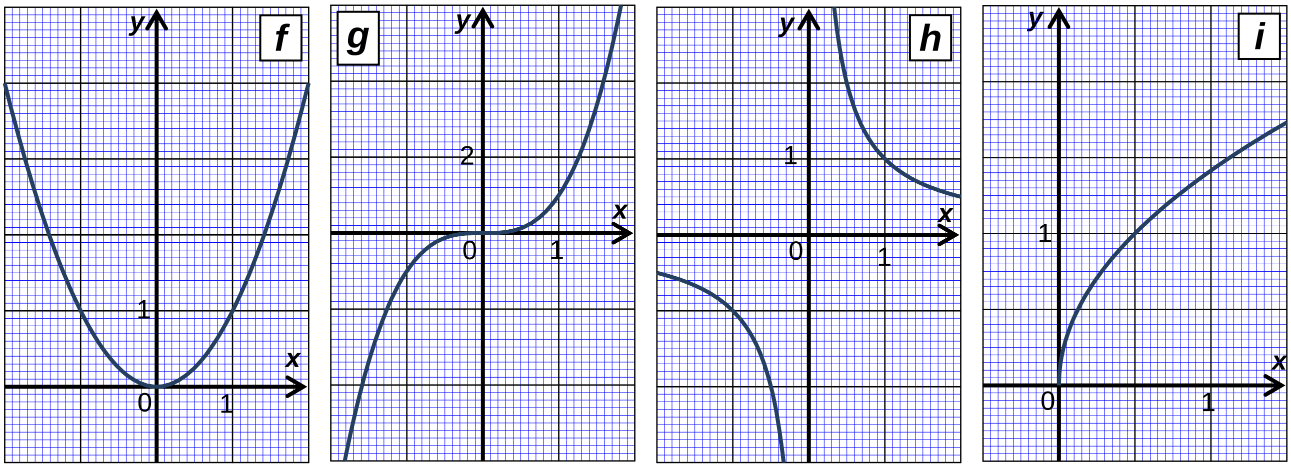
a. Calculer l'angle α_C au point *C*. Le résultat sera arrondi au dixième de degré. ....
....

b. Conclusion : pourra-t-on maintenir le recouvrement au point *C* ? Justifier la réponse. ....
....

FONCTION DÉRIVÉE : ÉTUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

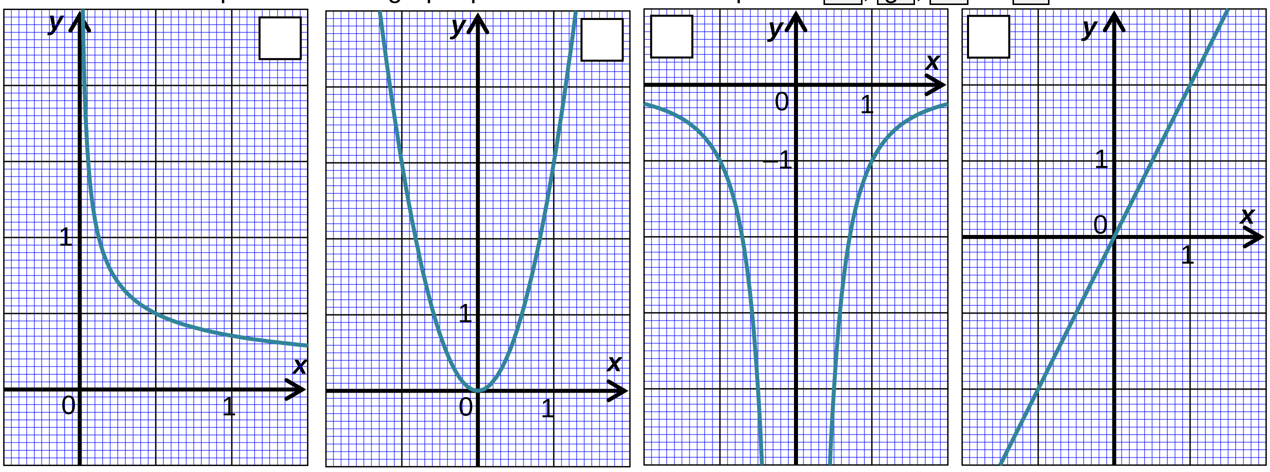
ACTIVITE 2 « Fonctions dérivées des fonctions de référence »

Soient les fonctions usuelles suivantes : la fonction carré f définie par $f(x) = x^2$; la fonction cube g définie par $g(x) = x^3$; la fonction inverse h définie par $h(x) = \dfrac{1}{x}$ et la fonction racine carré i définie par $i(x) = \sqrt{x}$.



☐***1.*** On a tracé dans quatre fichiers GeoGebra la représentation graphique de ces fonctions. À un point A, mobile sur leur représentation graphique, a été associé un point M calculant le nombre dérivé de la fonction au point de l'abscisse de A. On note f', g', h' et i' les fonctions dérivées respectives de f, g, h et i.

a. Utiliser ces quatre fichiers en déplaçant le point A pour observer l'évolution du nombre dérivé et attribuer aux représentations graphiques suivantes leur étiquette : $\boxed{f'}$, $\boxed{g'}$, $\boxed{h'}$ ou $\boxed{i'}$.



b. Utiliser alors la calculatrice ou le logiciel GeoGebra pour réattribuer les expressions des fonctions dérivées à chacune des fonctions usuelles du tableau ci-contre, parmi les expressions suivantes : $\boxed{3x^2}$ $\boxed{\dfrac{-1}{x^2}}$ $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$ $\boxed{2x}$

Fonction	Fonction dérivée
$f(x) = x^2$	$f'(x) =$ ....
$g(x) = x^3$	$g'(x) =$ ....
$h(x) = \dfrac{1}{x}$	$h'(x) =$ ....
$i(x) = \sqrt{x}$	$i'(x) =$ ....

☐***2.*** On s'intéresse maintenant à la dérivée d'une somme de fonctions usuelles.

Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$ et $v(x) = 3x$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ comme étant la somme des deux précédentes : $f(x) = u(x) + v(x)$.

a. Donner l'expression de la fonction f : $f(x) =$ ....

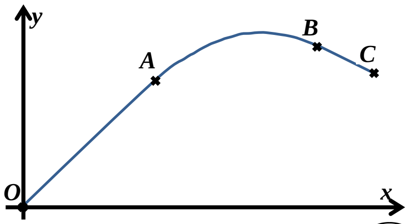
Exercice 1 : Calcul de fonctions dérivées

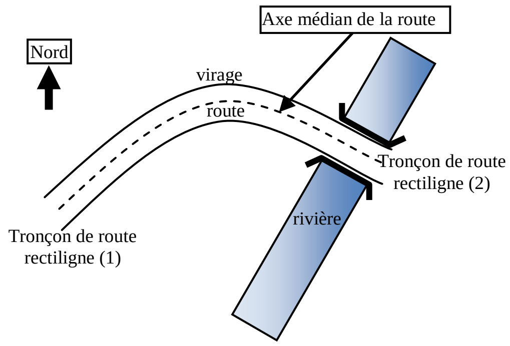
Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions suivantes définies par :

- $f_1(x) = x^2 + x^3$ sur $\mathbb{R}$
- $f_2(x) = -3x + 4$ sur $\mathbb{R}$
- $f_3(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$
- $f_4(x) = -5x + 4$ sur $\mathbb{R}$
- $f_5(x) = -6x + \sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$
- $f_6(x) = x^2 - 1$ sur $[-4 ; 4]$
- $f_7(x) = -x^2 + 1$ sur $[-4 ; 4]$
- $f_8(x) = -6x^2 + 4x - 2$ sur $\mathbb{R}$
- $f_9(x) = -3x^2 + 4x - 5$ sur $[-3 ; 3]$
- $f_{10}(x) = \dfrac{5}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$
- $f_{11}(x) = -3x - \dfrac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$
- $f_{12}(x) = 3x^3 - \dfrac{2}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$
- $f_{13}(x) = x^3 + x^2 + 2\sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$
- $f_{14}(x) = x^2 - 2x - 2$ sur $[0 ; 5]$
- $f_{15}(x) = -3x^3 + 2x^2$ sur $[0 ; 2]$
- $f_{16}(x) = -5x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ sur $\mathbb{R}$
- $f_{17}(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$
- $f_{18}(x) = \dfrac{4}{3x}$ sur $]-\infty ; 0[$
- $f_{19}(x) = 6\sqrt{x} + x^2$ sur $]0 ; +\infty[$
- $f_{20}(x) = (x - 3)^2$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 : Raccordement d'une route

Une entreprise de Travaux Publics a en charge la construction d'une route avec franchissement d'un pont en raccordant deux tronçons rectilignes. Pour cela, on modélise le tracé du virage par l'axe médian de la route (ligne blanche) de la façon suivante :





$[OA]$ et $[BC]$ sont des segments de droite et $\overset{\frown}{AB}$ est un arc de courbe. L'objet du travail est de vérifier le respect des contraintes de raccordement.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormal d'axes (Ox, Oy) et d'unité graphique 1 cm, on définit les points suivants par leurs coordonnées :

Point	O	A	B	C
abscisse x	0	9	21	25
ordonnée y	0	9	12	10

<u>Première partie</u> : Étude des droites

1.1. Parmi les équations de droite suivantes, quelle est celle de la droite (OA) ? ❍ $y = \dfrac{x}{2}$ ❍ $y = x$ ❍ $y = 2x$

1.2. Parmi les équations de droite suivantes, quelle est celle de la droite (BC) ?

❍ $y = 0{,}5x + 22{,}5$ ❍ $y = 0{,}5x - 22{,}5$ ❍ $y = -0{,}5x + 22{,}5$ ❍ $y = -0{,}5x - 22{,}5$

1.3. Utiliser la calculatrice pour tracer ces deux droites, et déterminer les coordonnées du point I de leur intersection (les coordonnées seront arrondies à l'unité).

On donne les réglages de la fenêtre d'affichage : Xmin = 0 ; Xmax = 25 ; Ymin = 0 ; Ymax = 20.

<u>Deuxième partie</u> : Étude de l'arc $\overset{\frown}{AB}$

2.1.a. Calculer les coordonnées du milieu M du segment $[AI]$.

b. Calculer les coordonnées du milieu N du segment $[BI]$.

c. Montrer que le point J (15 ; 12,75) est le milieu du segment $[MN]$.

2.2.a. Utiliser le mode statistique de la calculatrice pour tracer les points A, B et J.

b. Utiliser les fonctions de la calculatrice pour déterminer l'équation de la parabole passant par ces trois points. Noter alors l'expression de la fonction f de type $ax^2 + bx + c$ qui modélise l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

c. Tracer la représentation graphique de la fonction f à la calculatrice.

2.3.a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.

b. Calculer les valeurs des nombres dérivés $f'(9)$ et $f'(21)$.

c. En déduire la propriété de la droite (OA) pour l'arc $\overset{\frown}{AB}$, et la propriété de la droite (BC) pour l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

<u>Troisième partie</u> : Contraintes de raccordement

Indiquer à l'aide d'une phrase et en utilisant les résultats de la question précédente, la propriété géométrique qui caractérise chacun des deux raccordements des trois parties de la route (tronçon rectiligne 1– virage – tronçon rectiligne 2).

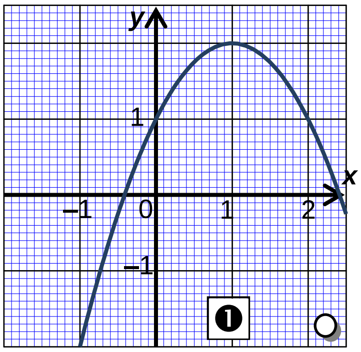
> **<u>Formulaire</u>** : Pour $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

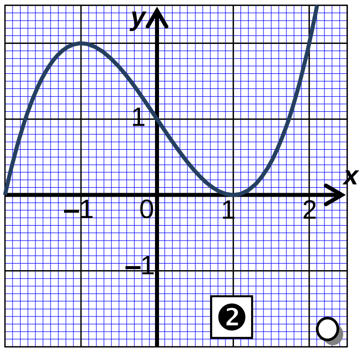
FONCTION DÉRIVÉE : ÉTUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

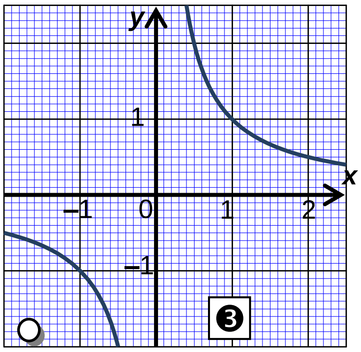
2. Études de fonction à l'aide de la dérivée

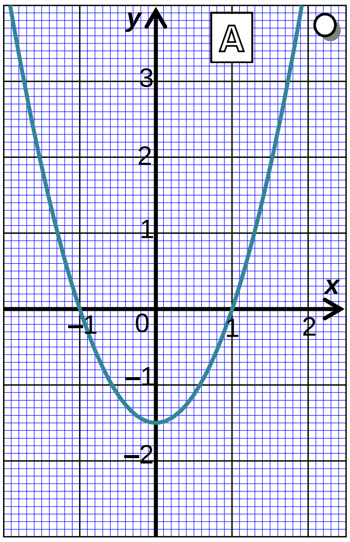
ACTIVITE 3 « Quel est le lien entre les variations d'une fonction et sa dérivée ? »

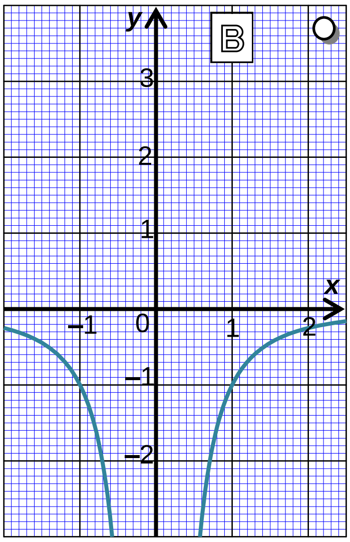
☐***1. Problématique*** On étudie trois profils de routes, modélisés par les fonctions dont les représentations graphiques ❶, ❷ et ❸ sont données ci-dessous. On donne aussi les représentations graphiques 𝔸, 𝔹 et ℂ des fonctions dérivées des fonctions modélisant les profils de routes.

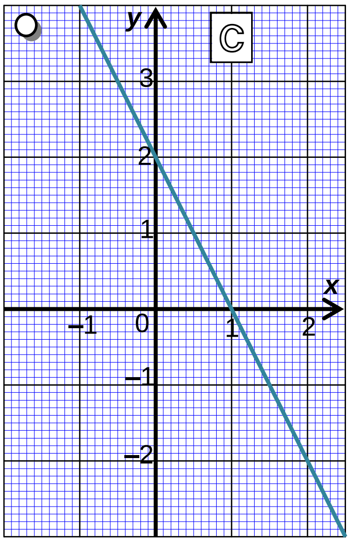












a. En utilisant les informations données par les graphiques, adopter la bonne stratégie et associer chaque fonction à sa dérivée.

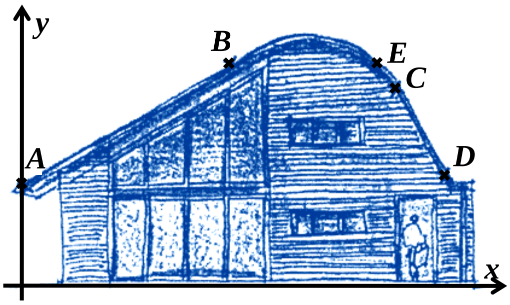
b. Conjecturer alors une propriété permettant de relier le sens de variation d'une fonction et sa dérivée.

....

....

Exercice 3 : Combles d'une maison à architecture innovante

Les maisons à basse consommation ont souvent une architecture innovante, à l'image de celle schématisée ci-contre. La ligne formant le toit est constituée d'un segment de droite [*AB*] ; d'un arc de parabole $\overset{\frown}{BC}$; et d'un segment de droite [*CD*], tangent à l'arc de parabole en *C*.



1. Dans un repère orthogonal, les points *B*, *E* et *C* sont respectivement repérés par les coordonnées :

$B\,(8\,;\,8)$, $E\,(12\,;\,8)$ et $C\,(13\,;\,7)$.

a. Utiliser le mode statistique de la calculatrice pour tracer les points *B*, *C* et *E*. On donne les réglages d'affichage : Xmin = 0 ; Xmax = 16 ; Ymin = 0 ; Ymax = 10.

b. Utiliser les fonctions de la calculatrice pour déterminer l'équation de la parabole passant par ces trois points. Noter alors l'expression de la fonction *f* de type $ax^2 + bx + c$ qui modélise l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

c. Déterminer l'expression de la fonction dérivée *f* ' de la fonction *f*.

d. Étudier le signe de cette dérivée pour établir le tableau de variation de la fonction *f*.

e. Quel est le maximum de la fonction *f* ?

2.a. (*CD*) est la droite tangente à l'arc de parabole $\overset{\frown}{BC}$ au point *C*. Calculer $f\,'(13)$.

b. Déterminer l'équation de la droite (*CD*). On utilisera la relation $y = f\,'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$.

c. Calculer l'ordonnée du point D d'abscisse $x_D = 16$.

3.a. Utiliser le mode statistique de la calculatrice pour ajouter au tracé les points *A* et *E*.

b. Utiliser la calculatrice pour tracer les représentations graphiques de la fonction *f* et de la droite (*CD*).

c. Tracer à la calculatrice la droite d'équation $y = 6$, représentant le plancher des combles au 2e étage.

4.a. Déduire des questions précédentes la hauteur maximale des combles.

b. La surface est habitable si la hauteur des combles sous le toit est supérieure ou égale à 1,80 m. Déterminer la largeur au sol de la surface habitable des combles.

Exercice 4 : Prix minimal de dalles en béton

Pour proposer le meilleur prix à son client en respectant les normes de construction en vigueur, une entreprise de travaux publics est conduite à approfondir son étude de prix du mètre carré de dalle en béton.

On appelle *P* le prix de 1 m² de dalle en béton, exprimé en euros, connaissant l'épaisseur *h*, en mètres, de la dalle (pour une épaisseur comprise entre 0,1 et 0,25 mètres. On a $P = 105h + \dfrac{4{,}2}{h} + 23$.

1. Calculer les prix du mètre carré de dalle pour des hauteurs de 0,1 ; 0,18 ; 0,2 ; 0,22 et 0,25 m.

2. Soit la fonction *f* définie sur [0,1 ; 0,25] par $f(x) = 105x + \dfrac{4{,}2}{x} + 23$.

a. Que modélise la fonction *f* ?

b. Utiliser la calculatrice pour tracer la représentation graphique de la fonction *f*. On donne les réglages de la fenêtre d'affichage : Xmin = 0,1 ; Xmax = 0,25 ; Ymin = 60 ; Ymax = 80.

c. Par lecture graphique sur la calculatrice, donner une estimation de la valeur minimale que semble prendre la fonction *f*.

3.a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée *f* ' de la fonction *f*.

b. On admet que $f\,'(x)$ a le même signe que l'expression $105x^2 - 4{,}2$. Résoudre l'équation du second degré $105x^2 - 4{,}2 = 0$.

c. En déduire le tableau de variation ci-contre.

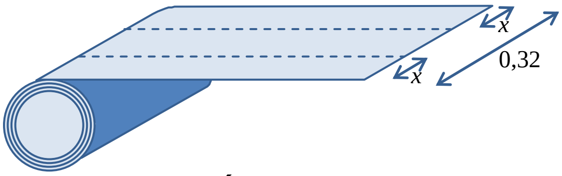
x	0,1 0,25
Signe de $f\,'(x)$	
Variations de *f*	

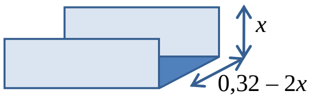
4. On appelle épaisseur économique de la dalle, l'épaisseur qui correspond au prix minimal de cette dalle. à l'aide des résultats précédents, indiquer quelle est l'épaisseur économique d'un mètre carré de la dalle considérée, puis le prix minimal d'un mètre carré de dalle.

FONCTION DÉRIVÉE : ÉTUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

Exercice 5 : Volume maximal de gouttières en aluminium

Les gouttières actuelles sont fabriquées sur place grâce à une bande d'aluminium mise en forme par une « profileuse ». La bande d'aluminium de 32 cm de large est déroulée et pliée par la machine. Le volume de la gouttière dépend de la cote de pliage *x*. **On cherche la valeur de cette cote *x* qui donne un volume maximal.**





***Première partie* : Étude d'une gouttière de 10 m de long**

1.1. *Expression du volume selon x.*

- ***a.*** Calculer la largeur l de la gouttière si sa hauteur est $x = 0{,}07$ m.
- ***b.*** Calculer en m³ le volume V_1 de la gouttière si sa hauteur est $x = 0{,}07$ m.
- ***c.*** De même, calculer en m³ le volume V_2 de la gouttière si sa hauteur est $x = 0{,}11$ m.
- ***d.*** Exprimer, en m³, le volume V de la gouttière de longueur 10 m en fonction de x.

1.2. On étudie la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 0,16] par $f(x) = 3{,}2x - 20x^2$.

- ***a.*** Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
- ***b.*** Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ et étudier le signe de cette dérivée sur [0 ; 0,16].
- ***c.*** Dresser le tableau de variation de la fonction f.
- ***d.*** Montrer que la fonction passe par un maximum pour une valeur x_0 de x, que l'on précisera.

1.3. Quelle doit être la cote x pour que le volume de la gouttière soit maximal ? quel est alors ce volume ?

***Seconde partie* : Étude de la gouttière de longueur quelconque L**

2.1. Montrer que le volume d'une gouttière de 32 cm de large et de longueur L s'écrit : $V(x) = L(0{,}32x - 2x^2)$

2.2. Utiliser le logiciel GeoGebra pour tracer la fonction f définie dans la première partie.

2.3.a. Créer un curseur représentant la valeur de L pouvant varier de 0 à 20 m.

- ***b.*** Représenter sur l'intervalle [0 ; 0,16] la fonction V définie par $V(x) = L(0{,}32x - 2x^2)$.

2.4. Déplacer le curseur et observer les variations de V lorsque L varie entre 0 et 20. La valeur de L a-t-elle une influence sur la cote x permettant d'obtenir le volume maximal ?

2.5. En utilisant les fonctionnalités du logiciel, tracer la dérivée de la fonction V et observer son signe sur l'intervalle [0 ; 0,16] lorsque L varie entre 0 et 20. En quoi ce résultat confirme-t-il les observations précédentes ?

2.6. Observer les expressions de V et de sa dérivée lorsque L varie entre 0 et 20 dans la fenêtre algébrique du logiciel, et en déduire l'expression de $V'(x)$ de la dérivée de V en fonction de L.

Exercice 6 : Construire et aménager une maison

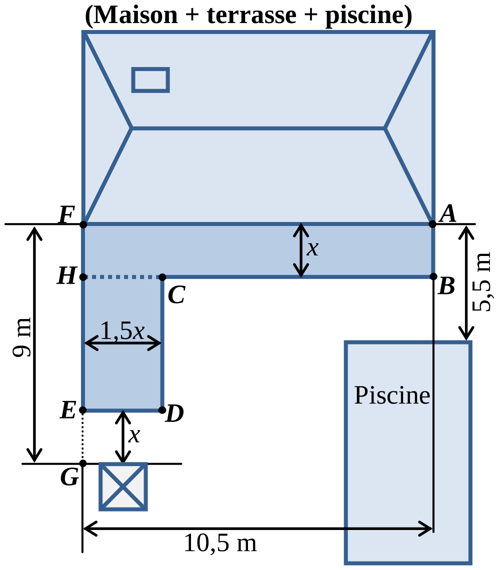
Des particuliers souhaitent réaliser sur leur propriété une terrasse *ABCDEF* suivant le croquis ci-contre.

Afin que l'ensemble reste harmonieux et que la terrasse réponde à leurs besoins, ils exigent du maçon que les largeurs des deux « ailes » de cette terrasse aient les proportions suivantes : $AB = x$ et $ED = 1{,}5x$. Le maçon devra aussi préserver un accès $EG = x$.

Le budget des clients est limité.

Problématique : Il s'agit donc de donner à x une valeur afin que **l'aire de la surface au sol de la terrasse soit la plus grande possible** tout en respectant les exigences des clients ainsi que leur budget.

Vue de dessus d'une partie de la propriété (Maison + terrasse + piscine)



***Première partie** : Étude de cas*

1.1. *Étude d'un cas particulier*

- ***a.*** Dans cette question, on prend $x = 2{,}5$ m. Calculer l'aire des rectangles *ABHF* et *CDEH.*
- ***b.*** En déduire l'aire totale $\mathcal{A}_t$ de la surface de la terrasse.

1.2. *Étude du cas général*

- ***a.*** Exprimer, en fonction de x, 1'aire $\mathcal{A}_1$ du rectangle *ABHF* et l'aire $\mathcal{A}_2$ du rectangle *CDEH.*
- ***b.*** En déduire, en fonction de x, l'expression de l'aire totale $\mathcal{A}$ de la surface *ABCDEF.*

***Deuxième partie** : Modélisation par une fonction*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 5,5] par $f(x) = -3x^2 + 24x$.

2.1.a. Utiliser la calculatrice pour tracer la représentation graphique de la fonction f. On donne les réglages de la fenêtre d'affichage : Xmin = 1 ; Xmax = 5,5 ; Ymin = 0 ; Ymax = 50.

- ***b.*** Pour quelle valeur de x la fonction f semble-t-elle admettre un maximum ?

2.2.a. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.

- ***b.*** Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
- ***c.*** Étudier le signe de $f'(x)$ sur [1 ; 5,5], puis dresser le tableau de variation de f.

2.3.a. Pour quelle valeur de x, l'aire $\mathcal{A}$ est-elle maximale ? Quelle est cette aire maximale ?

- ***b.*** Donner, dans ce cas, les largeurs *AB* et *ED* des deux « ailes ».
- ***c.*** En déduire la distance qui sépare le côté [*CB*] de la terrasse et la piscine.

***Troisième partie** : Application des contraintes*

Leur budget étant limité, les clients souhaitent que l'aire de leur future terrasse soit limitée à 45 m^2. Pour des raisons de sécurité, la distance de la terrasse à la piscine doit être au minimum de 2 m.

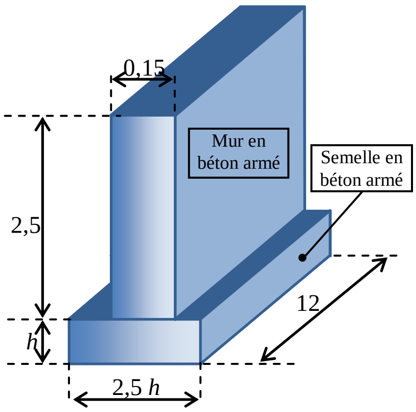
3.1. À l'aide de la calculatrice, résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 45$.

3.2. Afin de vérifier par le calcul les résultats de la question précédente, résoudre l'équation $-3x^2 + 24x = 45$.

3.3. En déduire la valeur de x respectant les deux contraintes. Justifier la réponse. Quelle est alors la distance séparant le côté [*CB*] de la terrasse et la piscine ?

Exercice 7 : Ouvrage en béton armé

Le schéma ci-contre représente un ouvrage en béton armé, constitué d'un mur et des ses fondations appelées « semelle ». Le mur et la semelle sont deux des pavés droits. Sur le schéma les cotes sont exprimées en mètre et les proportions ne sont pas respectées.



La réalisation de cet ouvrage doit satisfaire les exigences suivantes :

- la hauteur h de la semelle est comprise entre 0,15 m et 0,60 m ;
- le sol étant argileux, la pression exercée par l'ensemble {mur + semelle} ne doit pas dépasser 20 000 Pa.

<u>Première partie</u> : Expression de la pression exercée par l'ouvrage

1.1. *Calcul du volume total de béton nécessaire pour réaliser l'ouvrage*

a. Calculer, en m^3, le volume de béton, noté V_M, du mur.

b. Exprimer, en fonction de h, le volume en m^3, noté V_S, de la semelle.

c. En déduire, en fonction de h, l'expression du volume total de béton en m^3, noté V_T, de l'ouvrage.

1.2. *Expression de la pression exercée sur l'ouvrage.*

La masse volumique du béton armé utilisé pour la fabrication de cet ouvrage étant de 2 500 kg/m^3, son poids total en Newton (N), exprimé en fonction de h est : $F = 750\,000\, h^2 + 112\,500$.

Soit p la pression exercée par l'ouvrage au sol. Cette pression p, exprimée en Pascal, est donné par la formule suivante : $p = \dfrac{F}{S}$ dans laquelle S représente la surface de la base de la semelle.

Montrer que la pression p s'exprime en fonction de h, par la relation : $p = \dfrac{3\,750}{h} + 25\,000\, h$.

<u>Deuxième partie</u> : Modélisation par une fonction

On considère la fonction f définie sur [0,15 ; 0,60] par $f(x) = \dfrac{3\,750}{x} + 25\,000\, x$.

2.1.a. Tracer la représentation graphique de la fonction f à la calculatrice. On donne les réglages de la fenêtre d'affichage : Xmin = 0,15 ; Xmax = 0,60 ; Ymin = 18000 ; Ymax = 28000.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 20\,000$. Exprimer les solutions sous forme d'un intervalle.

2.2.a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.

b. Montrer, en explicitant la réponse, que $f'(x)$ peut se mettre sous la forme $f'(x) = \dfrac{25\,000\, x^2 - 3\,750}{x^2}$.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation du second degré d'inconnue x : $25\,000\, x^2 - 3\,750 = 0$ Arrondir au centième.

d. En utilisant la réponse précédente, résoudre $f'(x) = 0$ sur l'intervalle [0,15 ; 0,60].

e. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

<u>Troisième partie</u> : Exploitation des résultats

3.1. Déterminer les valeurs de h telles que $p \leqslant 20\,000$ Pa.

3.2. Donner la valeur de h pour laquelle la pression est minimale.

3.3. Dans le but d'économie, on choisit la valeur de h donnant une semelle de volume minimum, tout en respectant les exigences de l'énoncé. Donner alors les dimensions de la semelle.

Exercice 8 : Puissance mécanique et couple moteur

La puissance mécanique P développée par un moteur varie en fonction de sa fréquence de rotation. On note n la fréquence de rotation exprimée en milliers de tours par minutes. La puissance P est alors $P = -2n^3 + 12n^2 + 30n$ pour une fréquence de rotation comprise entre 1 et 6 milliers de tours par minutes.

Le moment du couple moteur disponible en bout d'arbre varie en fonction de la puissance et de la fréquence de rotation.

On cherche à déterminer si le couple moteur est maximum lorsque la puissance est maximale.

Moteur Diesel pour engins de Travaux Publics

<u>Première partie</u> : Modélisation de la puissance

La puissance peut être modélisée par la fonction f définie sur [1 ; 6] par $f(x) = -2x^3 + 12x^2 + 30x$.

1.1.a. Utiliser la calculatrice pour tracer la représentation graphique de la fonction f. On donne les réglages de la fenêtre d'affichage : Xmin = 1 ; Xmax = 6 ; Ymin = 0 ; Ymax = 210.

b. Pour quelle valeur de x la fonction f semble-t-elle admettre un maximum ?

1.2.a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.

b. Calculer $f'(5)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

***Deuxième partie* : Modélisation du couple moteur**

2.1. Le moment du couple moteur est proportionnel au rapport $\frac{P}{n}$. Exprimer le rapport $\frac{P}{n}$ en fonction de n.

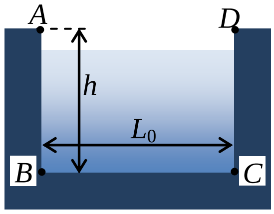
2.2. Soit la fonction g définie sur l'intervalle [1 ; 6] par $g(x) = \frac{f(x)}{x} = -2x^2 + 12x + 30$.

- ***a.*** Déterminer l'expression de la fonction dérivée g' de la fonction g.
- ***b.*** Résoudre l'équation $g'(x) = 0$.
- ***c.*** Étudier le signe de $g'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction g.
- ***d.*** En déduire la valeur de x pour laquelle la fonction g présente un maximum.

***Troisième partie* : Conclusion**

3.1. Déduire la fréquence de rotation pour laquelle la puissance est maximum, et la valeur de cette puissance.
3.2. Peut-on dire que le couple moteur est maximum lorsque la puissance est maximale ?

Exercice 9 : Canal ouvert



On veut, avant construction, rendre minimal le frottement d'un fluide contre les parois d'un canal ouvert, de section intérieure rectangulaire *ABCD*. Soit la hauteur $h = AB$ et la largeur $L_0 = BC$. On fait l'hypothèse suivante : le frottement est minimal lorsque la longueur $d = AB + BC + CD$ de la section est minimale.

L'objectif est de déterminer la hauteur *h* pour laquelle les frottements sont minimaux.

Toutes les longueurs sont exprimées en mètre et les aires sont exprimées en mètre carré.

***Première partie* : Analyse de la situation**

L'aire de la section rectangulaire *ABCD* est 0,5.
1.1.*a* Dans le cas particulier où $h = 2$, calculer la largeur L_0.
b. Calculer alors la longueur $d = AB + BC + CD$.
1.2.*a.* Dans le cas général, exprimer la largeur L_0 en fonction de h.
b. Justifier que la longueur d, en fonction de h, peut s'écrire : $d = 2h + \frac{1}{2h}$.

***Deuxième partie* : Modélisation par une fonction**

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0,1 ; 2] par : $f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$.

2.1.*a.* Utiliser la calculatrice pour tracer la représentation graphique de la fonction f. On donne les réglages de la fenêtre d'affichage : Xmin = 0 ; Xmax = 2 ; Ymin = 0 ; Ymax = 6.
b. Pour quelle valeur de x la fonction ***f*** semble-t-elle admettre un minimum ?
2.2.*a.* Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.
b. Justifier que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme $f'(x) = \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x^2}$.
c. Compléter le tableau de signe ci-contre.

x	0,1 0,5 2
$2x + 1$	
$2x - 1$	
$2x^2$	
$\frac{(2x-1)(2x+1)}{2x^2}$	

d. Déduire de la question précédente le tableau de variation de la fonction f ci-dessous.

x	0,1 2
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

f. Pour quelle valeur de x la fonction f admet-elle un minimum ?
g. Quelle est la valeur de ce minimum ?

***Troisième partie* : Exploitation**

Dans la modélisation mathématique précédente, x représente la hauteur h du canal, et $f(x)$ représente la longueur $d = AB + BC + CD$. On admet que les frottements du fluide contre les parois du canal sont minimaux lorsque la longueur d est minimale.
3.1. Donner la valeur de h pour laquelle les frottements sont minimaux.
3.2. Donner alors la valeur correspondante de la longueur d.