CH VII Système de deux équations à deux inconnues.

Activité : Lors d'un rallye, deux pilotes décident de se partager les 40 derniers litres de carburant de sorte que leur réservoir contienne la même quantité d'essence. Il reste 9 L dans celui du premier et 17 L dans celui du second.
Soient x la quantité d'essence donnée au premier et y celle donnée au second. La première affirmation nous permet de dire :

La deuxième affirmation nous permet de dire que :

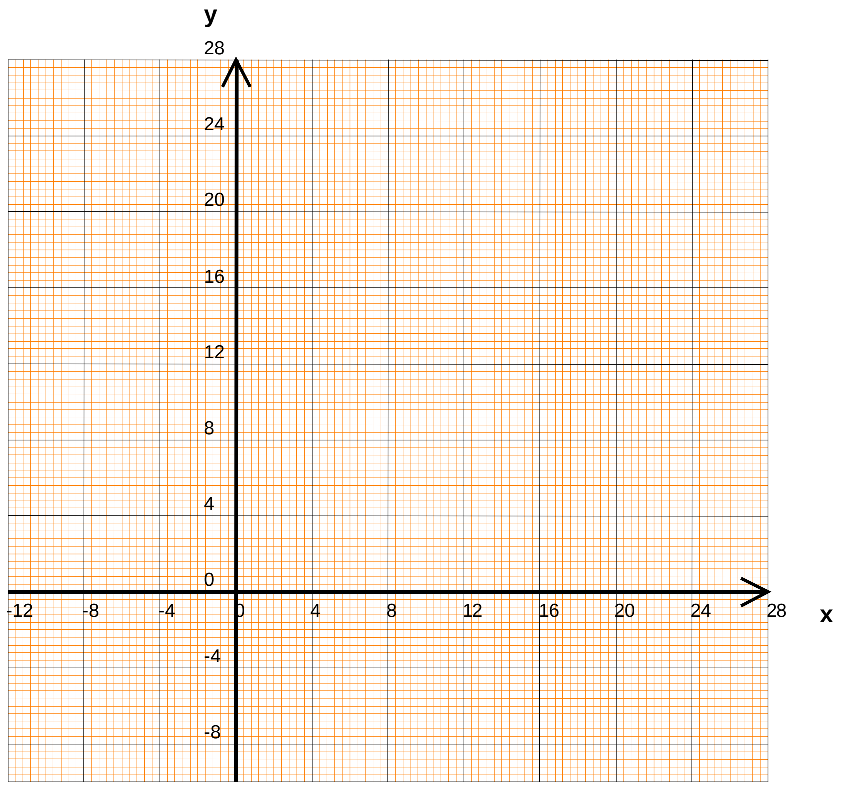
On dispose donc d'un système de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (2) \end{cases}$$

Résoudre ce système nous permettra de connaître la quantité d'essence donnée à chacun des concurrents.

I) Résolution graphique :

Dans un repère orthonormal d'unité 1 cm pour 4 L, représentons les deux droites (1) et (2).
De (1) on tire y = ...
De (2) on tire y = ...



Le point d'intersection entre les deux courbes est (..... ; ....), il représente la solution du système. .... L seront données au premier et ..... L au second.

II) Résolution algébrique :

1) Résolution par substitution :

Reprenons le système précédent : $\begin{cases} x + y = 40 & (1) \\ x - y = 8 & (2) \end{cases}$

La méthode par substitution consiste à partir d'une des deux équations à exprimer une des deux inconnues en fonction de l'autre, puis à remplacer cette inconnue dans l'autre équation.

A partir de (1), on écrit x = ... On remplace x de la deuxième équation par 40 – y et on détermine la valeur de y.

Dans (2) ....– y = 8

y =

Connaissant y, on détermine x en prenant l'une ou l'autre équation.

A partir de (1) x + ... = ...

x = ...

x = ...

La solution est bien la même que graphiquement.

<u>Exercice :</u> Résoudre $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = -6 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y = 38 \\ x + 2y = 40 \end{cases}$

2) Par combinaison linéaire :

Reprenons le système précédent : $\begin{cases} x + y = 40 & (1) \\ x - y = 8 & (2) \end{cases}$

On remarque qu'en ajoutant membre à membre les deux équations, on élimine les termes en y.

(1)

(2)

---

(1) + (2)

et donc x =

On remplace x par 24 dans l'une ou l'autre des deux équations et on obtient y.

A partir de (1) ......+ y = ...

y = ...

y = ...

La solution est une fois de plus la même.

Cette méthode consiste donc à ajouter membre à membre les deux équations après les avoir multipliées par des facteurs adaptés. Les coefficients d'une même inconnue doivent être opposés pour que les termes s'annulent après addition membre à membre. Si les coefficients sont les mêmes, il suffira de réaliser une soustraction membre à membre.

Exemple 2 : Résoudre $\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}4x + 3y = 4\\2x + 5y = 3\end{cases}$

On reprend la première équation telle qu'elle et on multiplie la deuxième par 2.

(1)

(3) 2 fois (2)

---

(1) - (3)

y =

(4) 5 fois (1)

(5) 3 fois (2)

---

(4) – (5)

x =

La solution est $\{ \quad ; \quad \}$

Exercice : Résoudre $\begin{cases}2x + y = 3\\x + 3y = -6\end{cases}$ $\begin{cases}2x + y = 38\\x + 2y = 40\end{cases}$

III) Application à la détermination d'une équation de droite :

Cherchons l'équation d'une droite connaissant les coordonnées de deux de ses points A (- 1 ; - 2) et B (3 ; 3).

L'équation recherchée est du type y = ax + b

Les coordonnées de A vérifient : ....

Les coordonnées de B vérifient : ....

On obtient le système : $\begin{cases}- a + b = - 2 & (1)\\3a + b = 3 & (2)\end{cases}$

Résolvons algébriquement le système en utilisant les deux méthodes :

a) Par substitution :

De (1) on tire b =

De (2) on obtient alors

A partir de (1) + b =

b =

y = ...x ....

b) Par combinaison :

(3) 3 fois (1)

(2)

(3) + (2)

b = -

(2) – (1)

a =

y = = ...x ....

IV) Résolution d'un problème du 1er degré à deux inconnues :

1) Exemple : Lors d'un stage en entreprise, il est confié à Léo de vider un fût de 100 L d'huile dans 35 récipients. Certains récipients ont une contenance de 2 L et d'autres de 5 L. Combien de récipients de chaque sorte doit-il utiliser de sorte qu'ils soient tous entièrement remplis ?

La résolution de ce problème se fait en 4 étapes tout comme la résolution d'une équation à 1 inconnue.

a) Étape N°1 : Il faut faire le choix des inconnues.

Soit x le nombre de récipients de 2 L.

Soit y le nombre de récipients de 5 L.

b) Étape N° 2 : Il faut effectuer la mise en équation.

Il existe 35 récipients au total donc ....

Le nombre x de récipient contenant 2 L plus le nombre y de récipient contenant 5 L correspond à 100 L donc ....

Le système est donc : $\begin{cases} \text{.....................................} & (1) \\ \text{.....................................} & (2) \end{cases}$

c) Étape N° 3 : Résolution du système .

d) Étape N° 4 : Il faut conclure.

Léo pourra remplir ....récipients de 2 L et ....récipients de 5 L.

2) Exercices :

Exercice N° 1 :

Sur une ancienne facture encore en francs, on relève les consommations suivantes :

980 kWh en « heures creuses »

710 kWh en « heures pleines » pour un montant de 845,40 F

Sur une deuxième facture de la même époque, on relève les consommations suivantes :

490 kWh en « heures creuses »

550 kWh en « heures pleines » pour un montant de 555,30 F

Déterminer le prix du kWh en « heures creuses » et celui en « heures pleines » à cette époque.

Exercice N° 2 : Résoudre le système $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = \frac{3}{4} \end{cases}$

Exercice N° 3 : Résoudre le système $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$