ACTIVITE « Modélisation d'une courbe à l'aide de la calculatrice »

Pour produire une partie de l'énergie électrique qu'il consomme, M. KERN utilise des capteurs photovoltaïques.

À éclairement constant, ces capteurs fournissent une puissance qui dépend de l'intensité débitée. Les valeurs relevées sont données dans le tableau suivant.

Intensité (A)	0	2	5	7	10	12	15	18	20
Puissance (W)	0	22	47,5	59,5	70	78	67,5	54	40

Dans un ouvrage d'électricité, M. KERN a lu que la puissance ***P*** peut se calculer à partir de l'intensité ***I*** par une relation de la forme $\boldsymbol{P = E \times I - R \times I^2}$.
Le but est ici de modéliser par une fonction les valeurs relevées, afin de déterminer les coefficients ***E*** et ***R***.
Des aides au fonctionnement de certaines calculatrices sont données sur la page suivante.

☐***1.*** En utilisant le mode « STAT » de votre calculatrice, saisir les valeurs du tableau.

☐***2.a.*** Régler les paramètres de la fenêtre graphiques (comme lorsque l'on trace une fonction !)

Xmin = 0 ; Xmax = 20 ; Xscl = 1 ; Ymin = 0 ; Ymax = 80 ; Yscl = 10

b. Faire afficher, grâce au mode statistique de la calculatrice, les points dans la fenêtre graphique.

☐***3.a.*** Par quel type de fonction peut-on modéliser les points obtenus ?

- ❍ $f(x) = ax$
- ❍ $f(x) = ax + b$
- ❍ $f(x) = ax^2$
- ❍ $f(x) = ax^2 + bx + c$
- ❍ $f(x) = \dfrac{a}{x}$
- ❍ $f(x) = a\sqrt{x}$
- ❍ $f(x) = ax^3$

b. Utiliser les fonctions de la calculatrice pour déterminer l'équation de la fonction modélisant les points affichés

Notes sur le fonctionnement des calculatrices CASIO (GRAPH 25)	*Notes sur le fonctionnement des calculatrices TEXAS (TI-82)*
❶ Pour saisir les données : • Choisir le menu « STAT » • Saisir les données dans les deux colonnes **❷ Pour afficher le graphe** • Appuyer sur GRAPH • Choisir ensuite « Graph 1 » **❸ Pour modéliser par une fonction du second degré** • A partir de l'écran obtenu à la fin de l'étape ❷, choisir « x^2 » • Choisir « Draw » pour afficher la courbe modélisée sur les points déjà tracés.	**❶ Pour saisir les données :** • Appuyer sur la touche STAT • Choisir « Edit » puis saisir les données dans les deux colonnes **❷ Pour régler les options d'affichage du graphe :** • Appuyer sur STAT PLOT • Activer sur « On » les lignes 1 et 2 **❸ Pour afficher le graphe** • Appuyer sur GRAPH **❹ Pour modéliser par une fonction du second degré** • Appuyer sur la touche STAT • Choisir « CALC » • Choisir « QuadReg » et valider

c. Noter l'équation de la fonction obtenue : $f(x)$ = ...

d. Tracer la représentation graphique de cette fonction.

e. La fonction modèle « colle »-t-elle parfaitement avec les points ? ....

Appel n°2 : Faire vérifier la modélisation

f. Compléter le tableau de variations de la fonction *f* :

x	0 20
f(*x*)	

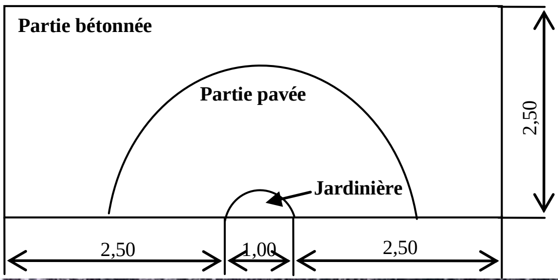
☐***4.a.*** Cette modélisation est-elle compatible avec les informations lue par M. KERN : $\boldsymbol{P = E \times I - R \times I^2}$?

....

b. Par analogie, déterminer les valeurs des coefficients ***E*** et ***R*** : ***E*** = ... ***R*** = ...

Exercice 1 : Aménagement d'un espace urbain

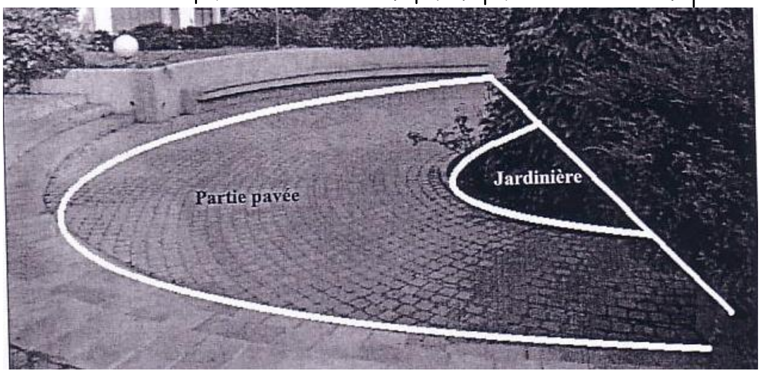
On désire aménager un espace urbain rectangulaire constitué d'une jardinière et d'une terrasse. La terrasse se compose de deux parties : une partie pavée et une partie bétonnée. Le dessin ci-contre représente une ébauche du projet. Sur le dessin, les proportions ne sont pas respectées. Les cotes sont exprimées en mètre.



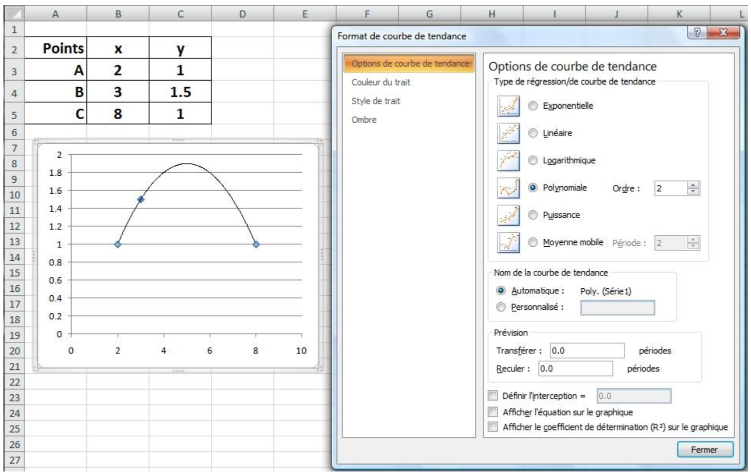
Le maître d'œuvre s'inspire de la photographie ci-contre.

On souhaite déterminer, une équation de la courbe constituant le bord de la jardinière. Pour cela, un opérateur réalise les tâches suivantes

- l'image est scannée, puis placée dans un repère ;
- trois points (notés *A*, *B* et *C*) sont positionnés sur le contour de la jardinière, puis repérés par leurs coordonnées ;
- les coordonnées des points sont entrées dans un tableur informatique, puis traitées.



Une copie de l'écran du logiciel utilisé est reproduite.



1. Quel type de tracé l'opérateur a-t-il choisi ?
- ❍ tracé linéaire
- ❍ tracé circulaire
- ❍ tracé parabolique
- ❍ tracé hyperbolique
- ❍ autre type de tracé

2. Utiliser le mode statistique de la calculatrice pour tracer les trois points *A*, *B* et *C*.

3. Utiliser les fonctions de la calculatrice pour déterminer l'équation de la fonction.

4. Tracer à la calculatrice cette fonction. Passe-t-elle par les trois points ?

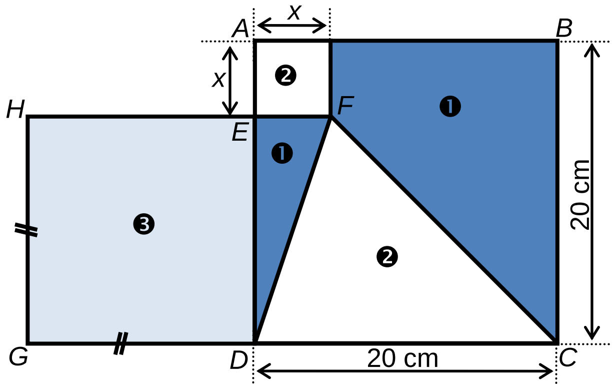
5. Déterminer à l'aide de la calculatrice les coordonnées du sommet *S* de la courbe représentative de la fonction.

6. Dresser le tableau de variation de la fonction.

2. Équation du second degré

ACTIVITE « Pavage d'un mur »

Pour paver une salle de bain avec le motif ci-contre.
L'aire A_1 de la surface ❶ est $A_1(x) = -x^2 + 10x + 200$.
L'aire A_2 de la surface ❷ est $A_2(x) = x^2 - 10x + 200$.
L'aire A_3 de la surface ❸ est $A_3(x) = x^2 - 40x + 400$.
On souhaite utiliser une méthode algébrique afin de déterminer les dimensions du motif de façon à ce que les trois surfaces soient égales.

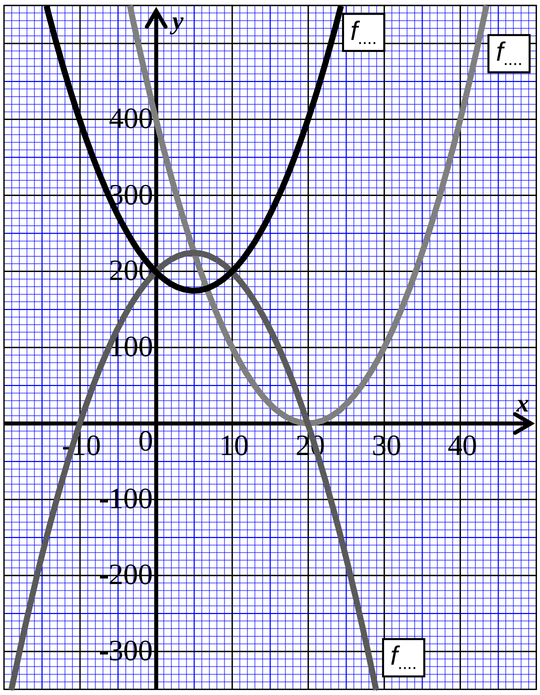


☐**1. Tracés de fonctions**

Les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies sur [– 20 ; 50] sont respectivement un modèle mathématique pour les aires A_1, A_2 et A_3.

a. Utiliser la calculatrice pour tracer les représentations graphiques de ces trois fonctions
On donne les réglages de la fenêtre d'affichage : Xmin = –20 ; Xmax = 50 ; Ymin = –200 ; Ymax = 600 .

b. Associer sur le graphique ci-contre le nom (f_1, f_2 ou f_3) de chacune des représentations graphiques.



☐**2. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$**

a. On souhaite ici résoudre les équations $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ et $f_3(x) = 0$. Déterminer **graphiquement** les solutions de ces trois équations :

Équation	$f_1(x) = 0$	$f_2(x) = 0$	$f_3(x) = 0$
Nombre de solutions	....	....	....
Solutions	....	....	....

b. Les équations $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ et $f_3(x) = 0$ sont toutes des équations du second degré, de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

On appelle « discriminant » le nombre noté Δ tel que :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

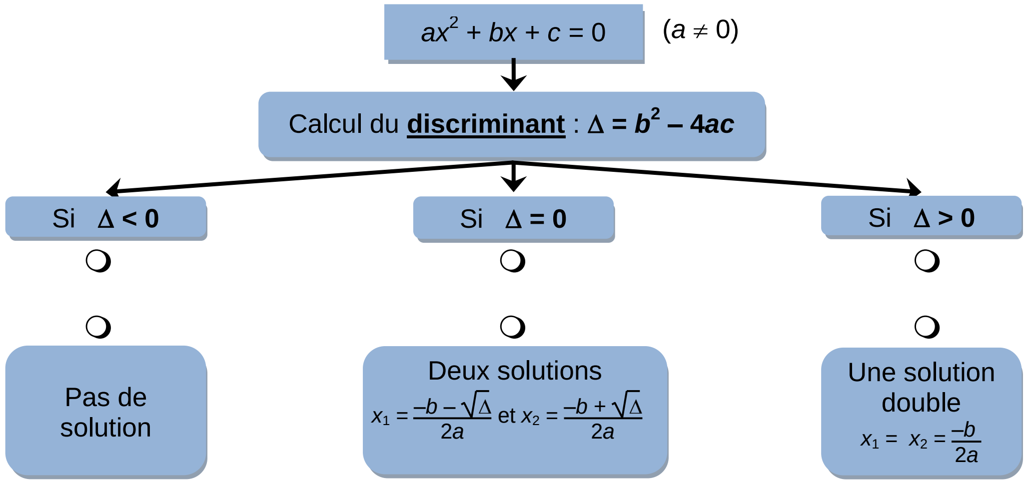
Compléter le tableau ci-dessous, en identifiant les coefficients ***a***, ***b*** et ***c*** pour chacune des équations, puis en calculant le discriminant, et enfin les nombres ***x*** et ***x'***.

Équation	$f_1(x) = -x^2 + 10x + 200 = 0$	$f_2(x) = x^2 - 10x + 200 = 0$	$f_3(x) = x^2 - 40x + 400 = 0$
a			
b			
c			
Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	Δ_1 = ...	Δ_2 = ...	Δ_3 = ...
$x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	x_1 = ...	x_2 = ...	x_3 = ...
$x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	x'_1 = ...	x'_2 = ...	x'_3 = ...

c. En comparant avec les résultats de la question ***2.a.***, donner la signification des nombre ***x*** et ***x'***.

....

d. Conjecturer l'algorithme de résolution d'une équation du second degré en reliant correctement les éléments du schéma de synthèse ci-contre :



☐***3.*** **Étude des surfaces**

L'aire de la surface ❶ doit être égale à l'aire de la surface ❸.

a. Montrer que l'équation $A_3(x) = A_1(x)$ revient à résoudre l'équation $\mathbf{2x^2 - 50x + 200 = 0}$.

....

....

....

b. Résoudre alors cette équation en suivant la méthode algébrique décrite à la question ***2.d.***.

a = ... ***b*** = ... ***c*** = ...

$\Delta = b^2 - 4ac$ = ...

Le signe du discriminant est .... donc il y a .... solution... :

....

....

....

....

....

....

c. Repérer sur le graphique la ou les solution(s) de cette équation.

d. Conclure quant aux dimension du motif pour obtenir les mêmes surfaces ❶ et ❸.

....

Exercice 2 : Étapes de résolution de l'équation du second degré

Chaque encadré suivant correspond à une étape de la résolution d'une équation du second degré.

Dans quel ordre faut-il suivre ces étapes ?
❍ ❶❷❸❹❺❻
❍ ❶❷❹❸❻❺
❍ ❻❺❶❹❷❸
❍ ❻❺❹❸❷❶

❶ Je calcule Δ

❷ J'énonce le nombre de solutions

❸ Je calcule la ou les solutions si elles existent

❹ J'étudie le signe de Δ

❺ J'identifie les coefficients a, b et c

❻ J'écris l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$

Exercice 3 : Résolution d'équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du second degré suivantes :

❶ $x^2 - 10x + 24 = 0$ ❷ $x^2 + 3x + 10 = 0$ ❸ $x^2 + 2x - 15 = 0$

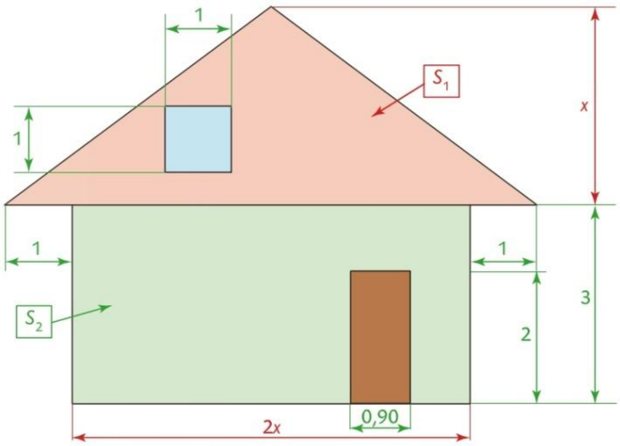
❹ $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 10 = 0$ ❺ $x^2 - 6x + 9 = 0$ ❻ $25x^2 - 36 = 0$

❼ $12x^2 + 7x = -1$ ❽ $(x + 2)(x + 9) = 4x\,(x - 1)$

Exercice 4 : Construire et aménager une maison

Le dessin ci-contre représente le pignon d'un garage.
Ce pignon va être recouvert d'un enduit.
L'objet du problème est d'étudier, en fonction de x, l'aire de ce pignon. Les cotes sont exprimées en mètre, x prend des valeurs entre 2 et 5. On note :

- A_1 : aire de la partie supérieure S_1, du pignon (sans la fenêtre).
- A_2 : aire de la partie inférieure S_2 du pignon (sans la porte).
- A_T : aire totale à enduire.



1. **<u>Première partie : Calcul des aires</u>**

1.1. Montrer que $A_1 = x^2 + x - 1$.

1.2. Montrer que $A_2 = 6x - 1{,}8$.

1.3. On se propose de déterminer x tel que $A_1 = A_2$.

a. Montrer que x est solution de l'équation $x^2 - 5x + 0{,}8 = 0$.

b. Résoudre cette équation.

c. En déduire la valeur de x, arrondie au dixième pour laquelle $A_1 = A_2$.

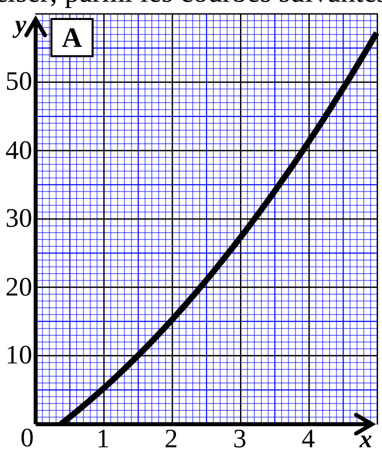
2. **<u>Deuxième partie : Étude d'une fonction</u>**

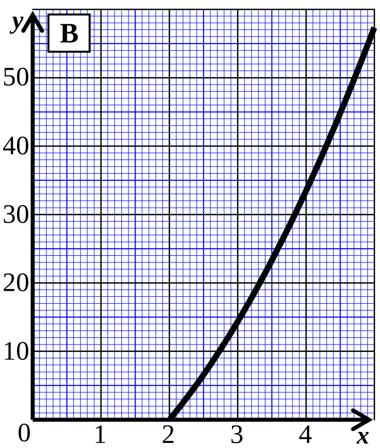
On considère la fonction g définie sur l'intervalle [2 ; 5] par : $g(x) = x^2 + 7x - 2{,}8$.
On admettra que la fonction g est croissante sur l'intervalle [2; 5].

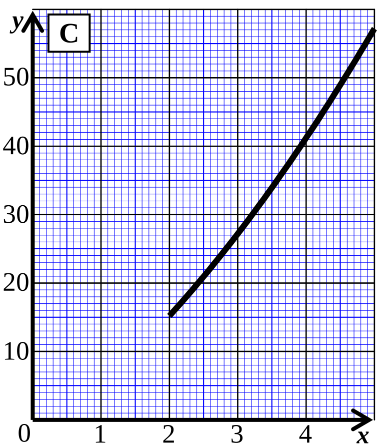
2.1. Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$g(x)$		20,95		33,95		48,95	

2.2. Tracer à l'aide de la calculatrice la représentation graphique de la fonction g sur l'intervalle [2 ; 5]. Préciser, parmi les courbes suivantes, la courbe obtenue.







3. **<u>Troisième partie : Utilisation de la courbe</u>**

3.1. Montrer que $A_T = x^2 + 7x - 2{,}8$.

3.2. En utilisant la courbe représentative de la fonction g, déterminer, avec la précision permise par le graphique, la valeur de x telle que l'aire totale A_T à enduire soit égale à 25.

3.3. On souhaite que la surface à enduire soit comprise entre 20 et 30. En utilisant la courbe, déterminer avec la précision permise par le graphique, l'encadrement des valeurs de x correspondantes.

Exercice 5 : Inclinaison de panneaux solaires

Les capteurs photovoltaïques doivent être orientés plein sud et leur inclinaison par rapport à l'horizontale doit être déterminée de façon à capter un maximum d'énergie.

1. La quantité d'énergie E, en kWh, reçue annuellement par un capteur photovoltaïque d'un mètre carré destiné à l'alimentation d'une pompe électrique est donnée par $E = -0{,}2\alpha^2 + 12{,}6\alpha + 1\,800$.

Dans cette expression, α désigne l'inclinaison par rapport à l'horizontale, et s'exprime en degré. Sa valeur est comprise entre 0 et 90°.

a. Calculer, en kWh, la quantité d'énergie reçue pour une inclinaison de 90°.

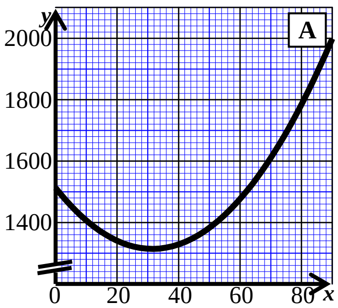
b. On souhaite déterminer l'inclinaison qui permet au capteur de recevoir 1 700 kWh/an.

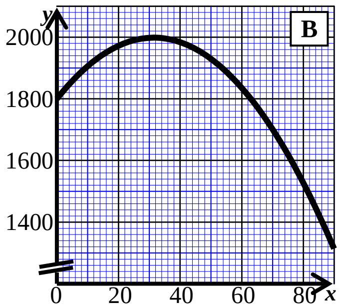
- Montrer que cela revient à résoudre l'équation $-0{,}2\alpha^2 + 12{,}6\alpha + 100 = 0$.
- Résoudre cette équation sur l'intervalle [0 ; 90]. Donner le résultat au dixième.
- Déduire l'inclinaison qui permet au capteur de recevoir annuellement 1 700 kWh. Arrondir à l'unité.

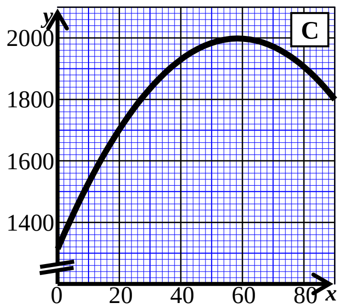
2. Afin d'éviter des calculs répétitifs, on se propose d'exploiter une méthode graphique. Pour cela, on étudie sur l'intervalle [0 ; 90] la fonction f définie par : $f(x) = -0{,}2x^2 + 12{,}6x + 1\,800$.

a. Quel type de courbe représente graphiquement la fonction f ?

b. Tracer à l'aide de la calculatrice la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 90]. Préciser, parmi les courbes suivantes, la courbe obtenue.







c. Déterminer les coordonnées du point S, sommet de cette courbe, à l'aide de la calculatrice.

d. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; 90].

3. Utiliser la représentation graphique pour déterminer :

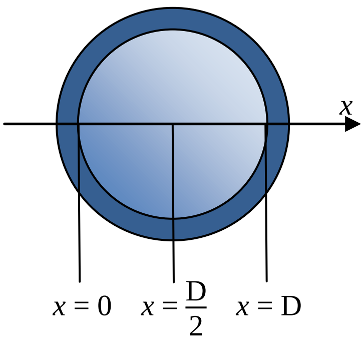
a. l'inclinaison nécessaire pour obtenir une énergie annuelle de 1 780 kWh ;

b. la quantité d'énergie annuelle maximale reçue par un capteur photovoltaïque ;

c. l'inclinaison pour recevoir cette énergie.

Exercice 6 : Écoulement d'un liquide

Une pompe permet le transport d'un liquide dans une canalisation. L'écoulement de ce liquide est sans turbulences. La position x dans la canalisation est donnée par le schéma. La vitesse v du liquide à la position x pour un écoulement laminaire est donnée par la formule : $v = \dfrac{\Delta p}{\ell} \times \dfrac{(x^2 - \mathrm{D}x)}{4\eta}$



avec $\begin{cases} \dfrac{\Delta p}{\ell} \text{ est la chute de pression le long de l'écoulement (en Pa/m)} \\ \text{D est le diamètre de la canalisation (en m)} \\ \eta \text{ est le coefficient de viscosité dynamique du liquide (en Pa.s)} \\ v \text{ est la vitesse du liquide (en m/s)} \end{cases}$.

On donne $\dfrac{\Delta p}{\ell} = -210$ Pa/m ; D = 0,05 m et $\eta = 0{,}5$ Pa.s.

1. Montrer que l'expression de la vitesse du fluide $v(x)$ en fonction de la position x est : $v(x) = -105x^2 + 5{,}25x$.

2. On cherche à déterminer les valeurs de x pour lesquelles la vitesse v est nulle. Proposer une méthode et la mettre en œuvre.