Bac Pro

POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

FICHE DE PRÉSENTATION **FICHE DE PRÉSENTATION** **FICHE DE PRÉSENTATION**

¤ OBJECTIF(S) ¤

- Résoudre algébriquement une équation du second degré à une inconnue.
- Factoriser un polynôme du second degré.

¤ EXPLICITATION ¤

- Être capable à l'issue des travaux de :
  - résoudre une équation du second degré en utilisant le formulaire,
  - factoriser un polynôme du second degré en utilisant le formulaire.

¤ PRÉ-REQUIS ¤

- Savoir résoudre une équation du premier degré à une inconnue (transposition, vérification).
- Savoir utiliser la calculatrice.
- Connaître les représentations graphiques des fonctions affine et carrée.

¤ CONDITIONS ¤

- Utiliser la calculatrice et le formulaire si nécessaire.

¤ CRITÈRES DE RÉUSSITE ¤

- **Sept** lignes justes sur **neuf** dans l'exercice **1**.
- **Cinq** lignes justes sur **sept** dans l'exercice **2**.
- **Cinq** lignes justes sur **cinq** dans l'exercice **3**.
- **La distance juste** pour le problème.

¤ CONSEILS ¤

- En utilisant la calculatrice, il faut faire attention à la place des parenthèses.

Bac Pro

POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

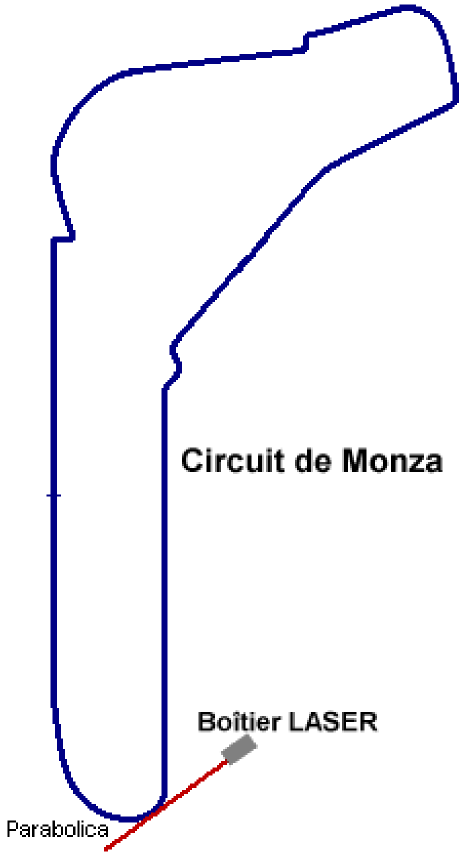
FICHE DE FORMATION **FICHE DE FORMATION** **FICHE DE FORMATION**

En début de saison, pendant des essais privés, une écurie de F1 cherche à optimiser le temps de passage du virage "La Parabolica" de Monza en Italie.

Le virage Parabolica vu par 2 pilotes de F1 :

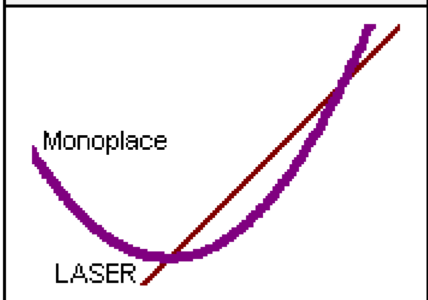
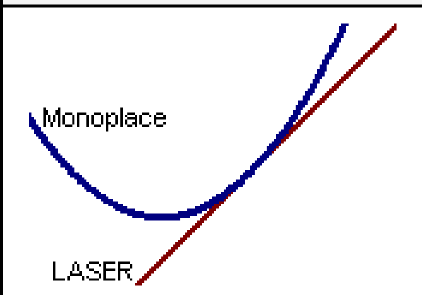
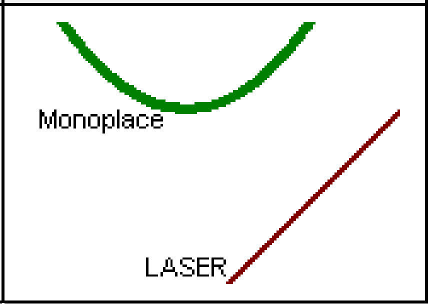
David Coulthard (Britannique) :
"La redoutable Parabolica, qui est peut-être la section la plus cruciale du circuit de Monza : c'est important de déboucher sur la ligne droite principale avec le plus de vitesse possible en se catapultant de la courbe à droite pour s'assurer de ne pas perdre ces précieux dixièmes."

Jacques Villeneuve (Canadien) :
"Le dernier virage à Monza, la Parabolica, est assez spécial. C'est très difficile ; visuellement, vous ne voulez pas y entrer car l'élément de danger est réel, et c'est difficile de bien prendre ce virage. On peut souvent le prendre plus vite qu'on le fait en fait."



Un détecteur LASER est posé sur le bord de la piste, à la sortie du virage, afin d'étudier la trajectoire de la monoplace.

Trois situations sont représentées ci-dessous :

Situation ①	Situation ②	Situation ③
		

On a constaté que le meilleur temps au tour est obtenu pour la trajectoire N° 2.

Un ordinateur modélise les trajectoires de la monoplace et du faisceau LASER et donne leur équation :

Cas ① : la trajectoire de la monoplace est assimilable à une parabole $\mathcal{P}_1$ d'équation : $y = x^2 + 4x + 1$

Cas ② : la trajectoire de la monoplace est assimilable à une parabole $\mathcal{P}_2$ d'équation : $y = x^2 + 3x$

Cas ③ : la trajectoire de la monoplace est assimilable à une parabole $\mathcal{P}_3$ d'équation : $y = x^2 + 0,75x$

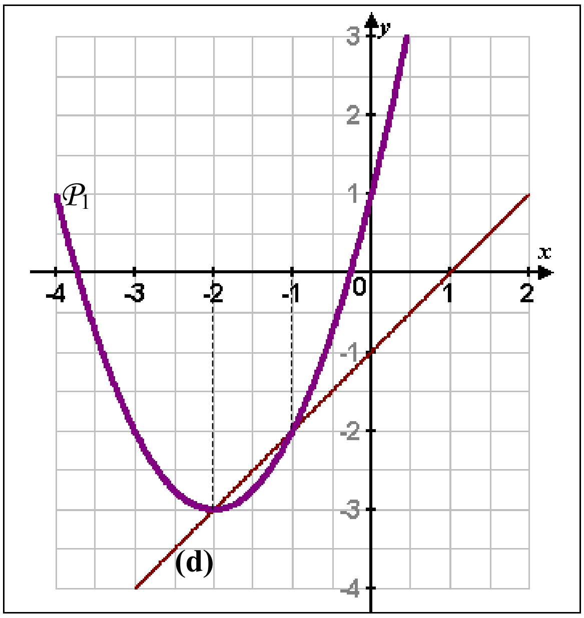
Quant au faisceau, il est assimilé à une droite (d) d'équation : $y = x - 1$

Bac Pro

POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

1. Étude de la situation ① :

La parabole $\mathcal{P}_1$ et la droite (d) sont représentées :



$\mathcal{P}_1$ et (d) se coupent en deux points d'abscisses respectives : $\boldsymbol{x_1 = -2}$ et $\boldsymbol{x_2 = -1}$

L'équation correspondant à cette situation s'écrit :

$$\underbrace{x^2 + 4x + 1}_{\mathcal{P}_1} = \underbrace{x - 1}_{(d)}$$

Sa résolution permet de retrouver, par le calcul, les abscisses de ces points.

Cette équation peut s'écrire, en transposant les termes : $x^2 + 3x + 2 = 0$

On vérifie que -1 et -2 sont solutions de cette équation :

$\boldsymbol{x = -2}$	$\boldsymbol{x = -1}$
$(-2)^2 + 3 \times (-2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$	$(-1)^2 + 3 \times (-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

Donc l'équation "$\boldsymbol{x^2 + 3x + 2 = 0}$" admet deux solutions.

C'est une équation du second degré à une inconnue du type "$\boldsymbol{a x^2 + b x + c = 0}$"

avec	$a = 1$	$b = 3$	$c = 2$

Il existe une méthode qui permet de résoudre une équation de ce type :

☞ On calcule un nombre, appelé discriminant et noté Δ (se lit "delta") :

$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2$

$\Delta = 1$

☞ On calcule les deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} \qquad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

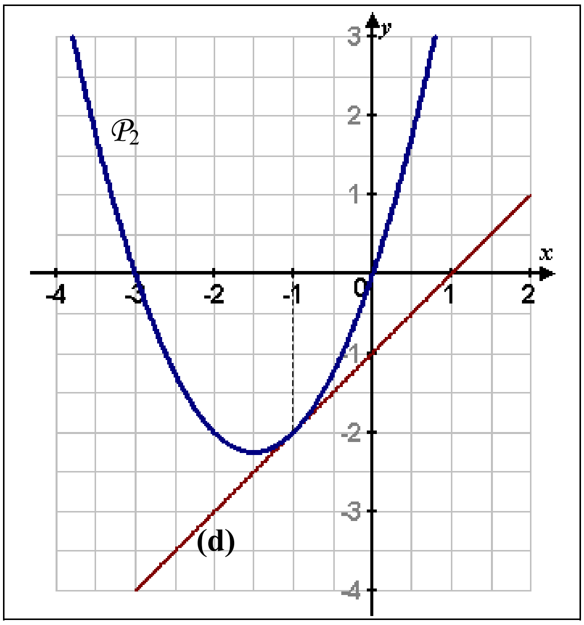
$$\boldsymbol{x_1 = -1} \qquad \boldsymbol{x_2 = -2}$$

Remarque : on retrouve les abscisses des deux points d'intersection.

2. Étude de la situation ② :

La parabole $\mathcal{P}_2$ et la droite (d) sont représentées :

$\mathcal{P}_2$ et (d) ont un point commun d'abscisse "**– 1**".



L'équation correspondant à cette situation s'écrit :

$$\underbrace{x^2 + 3x}_{\mathcal{P}_2} = \underbrace{x - 1}_{(d)}$$

Sa résolution permet de retrouver, par le calcul, l'abscisse de ce point.

Cette équation peut s'écrire, en transposant les termes : $x^2 + 2x + 1 = 0$

La méthode précédente permet de résoudre cette équation.

C'est une équation du second degré à une inconnue du type "$\boldsymbol{a x^2 + b x + c = 0}$".

☞ On identifie les coefficients $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$:

$a = 1$ | $b = 2$ | $c = 1$

☞ On calcule Δ :

$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1$

$\Delta = 0$

☞ On calcule les deux solutions :

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \boldsymbol{x_2} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{-2 + \sqrt{0}}{2 \times 1} \qquad \boldsymbol{x_2} = \frac{-2 - \sqrt{0}}{2 \times 1}$$

$$\boldsymbol{x_1 = -1} \qquad \boldsymbol{x_2 = -1}$$

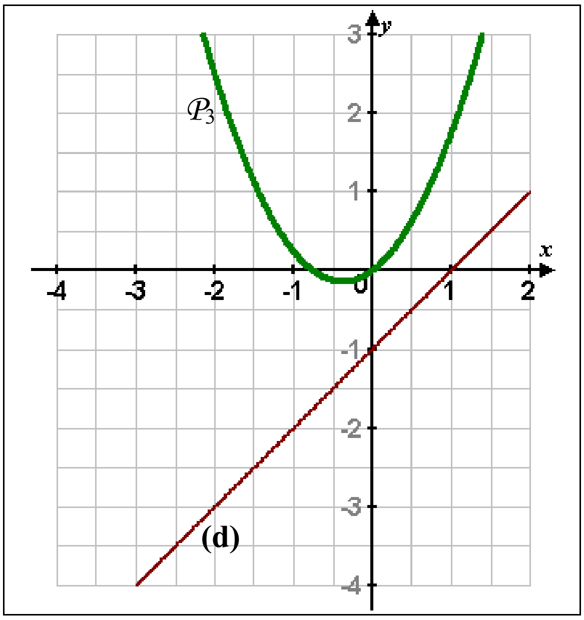
On constate que : $\boldsymbol{x_1 = x_2 = -1}$

Comme $\Delta = 0$ alors $\sqrt{\Delta} = 0$ et $\boldsymbol{x_1 = x_2} = -\dfrac{b}{2a}$

Remarque : la droite (d) est tangente à la parabole $\mathcal{P}_2$ au point d'abscisse $\boldsymbol{x = -1}$.

3. Étude de la situation ③ :

La parabole $\mathcal{P}_3$ et la droite (d) sont représentées :



$\mathcal{P}_3$ et (d) n'ont pas de point commun.

L'équation correspondant à cette situation s'écrit :

$$\underbrace{x^2 + 0{,}75\,x}_{\mathcal{P}_3} = \underbrace{x - 1}_{(d)}$$

ou encore : $x^2 - 0{,}25\,x + 1 = 0$

☞ On identifie les coefficients ***a***, ***b*** et ***c*** :

$a = 1$ | $b = -0{,}25$ | $c = 1$

☞ On calcule Δ :

$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4\,a\,c}$

$\Delta = (-0{,}25)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$\Delta = -3{,}365$

☞ Il n'y a pas de solution réelle car on ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre négatif.

4. Synthèse :

La méthode de résolution algébrique d'une équation du second degré à une inconnue est récapitulée dans le formulaire :

<u>Équation du second degré</u>

$a\,x^2 + b\,x + c = 0$ $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

- Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle

Remarque :

- Si $\Delta \geq 0$, $a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

Remarque :

Si **$\Delta \geq 0$,** la résolution d'une équation du second degré permet de factoriser le polynôme $a\,x^2 + b\,x + c$, c'est-à-dire de le mettre sous forme d'un produit de facteurs : $a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.

<u>Situation 1</u> : $x^2 + 3\,x + 2 = 0$ Solutions : $\boldsymbol{x_1 = -1}$ et $\boldsymbol{x_2 = -2}$

On peut écrire "$x^2 + 3\,x + 2$" sous la forme factorisée : $1 \times (x + 1)\,(x + 2)$

Soit : $\boldsymbol{x^2 + 3\,x + 2 = (x + 1)\,(x + 2)}$

<u>Situation 2</u> : $x^2 + 2\,x + 1 = 0$ Solutions : $\boldsymbol{x_1 = x_2 = -1}$

On peut écrire "$x^2 + 2\,x + 1$" sous la forme factorisée : $1 \times (x + 1)\,(x + 1)$

Soit : $\boldsymbol{x^2 + 2\,x + 1 = (x + 1)^2}$

Bac Pro

POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

FICHE D'ENTRAÎNEMENT **FICHE D'ENTRAÎNEMENT** **FICHE D'ENTRAÎNEMENT**

1. Compléter le tableau :

☞ en écrivant l'équation sous la forme : $\boldsymbol{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$ (si nécessaire) ;

☞ en identifiant $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$.

Équation	Équation sous la forme : $a\,x^2 + b\,x + c = 0$	Coefficients		
		a	b	c
$3 + 2\,x^2 + 4\,x = 0$	…………………………………			
$x^2 + 6 = 5\,x$	…………………………………			
$x^2 = x + 20$	…………………………………			
$7\,x^2 + 14\,x + 2 = 0$	…………………………………			
$-3\,x^2 + 2\,x - 12 = 0$	…………………………………			
$33 - 3\,x^2 = 333\,x$	…………………………………			
$\frac{x^2}{4} - \frac{3}{11} + 7{,}2\,x = 0$	…………………………………			
$18 + 4\,x^2 = 0$	…………………………………			
$x^2 = x$	…………………………………			

2.1. Résoudre les équations en complétant le tableau :

Équation	Discriminant $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$	Solution(s)	
		Nombre	Calcul
$x^2 - 5\,x + 6 = 0$	……………………………… ……………………………… ………………………………	………	……………………………………… ……………………………………… ………………………………………
$x^2 - 4\,x + 4 = 0$	……………………………… ……………………………… ………………………………	………	……………………………………… ……………………………………… ………………………………………
$x^2 - x - 1 = 0$	……………………………… ……………………………… ………………………………	………	……………………………………… ……………………………………… ………………………………………
$2\,x^2 - 8x - 10 = 0$	……………………………… ……………………………… ………………………………	………	……………………………………… ……………………………………… ………………………………………
$5\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$	……………………………… ……………………………… ………………………………	………	……………………………………… ……………………………………… ………………………………………
$\frac{3x^2}{2} - 4\,x + 2{,}5 = 0$	……………………………… ……………………………… ………………………………	………	……………………………………… ……………………………………… ………………………………………
$7\,x^2 + 14\,x + 2 = 0$	……………………………… ……………………………… ………………………………	………	……………………………………… ……………………………………… ………………………………………

2.2. À l'aide de l'exercice 2.1, **factoriser** :

$x^2 - 5x + 6 =$ ……………………………………………………………………………………

$x^2 - 4x + 4 =$ ……………………………………………………………………………………

$2x^2 - 8x - 10 =$ ……………………………………………………………………………………

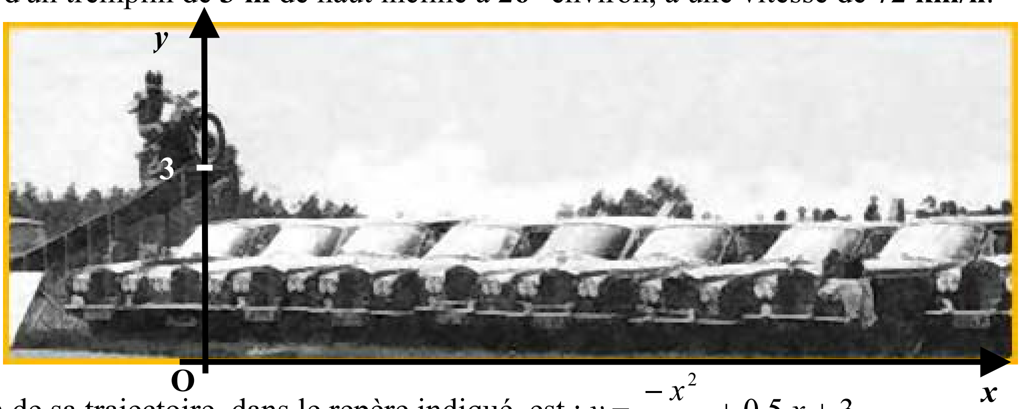
$\dfrac{3x^2}{2} - 4x + 2{,}5 =$ ……………………………………………………………………………………

$7x^2 + 14x + 2 =$ ……………………………………………………………………………………

3. Problème :

M. Pillot, cascadeur professionnel, tente un nouveau défi : un saut à moto au dessus d'un alignement de voitures.

Il s'élance d'un tremplin de **3 m** de haut incliné à **26°** environ, à une vitesse de **72 km/h**.



L'équation de sa trajectoire, dans le repère indiqué, est : $y = \dfrac{-x^2}{64} + 0{,}5x + 3$

À quelle distance du point **O**, doit-on placer le tremplin de réception de **2 m** de haut ?

………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………

Bac Pro

POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

FICHE AUTO-CORRECTIVE FICHE AUTO-CORRECTIVE FICHE AUTO-CORRECTIVE

1. Compléter le tableau :

☞ en écrivant l'équation sous la forme : $\boldsymbol{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$ (si nécessaire) ;

☞ en identifiant $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$.

Équation	Équation sous la forme : $a\,x^2 + b\,x + c = 0$	Coefficients		
		a	b	c
$3 + 2\,x^2 + 4\,x = 0$	$3 + 2\,x^2 + 4\,x = 0$	**2**	**4**	**3**
$x^2 + 6 = 5\,x$	$x^2 - 5\,x + 6 = 0$	**1**	**– 5**	**6**
$x^2 = x + 20$	$x^2 - x - 20 = 0$	**1**	**– 1**	**– 20**
$7\,x^2 + 14\,x + 2 = 0$	$7\,x^2 + 14\,x + 2 = 0$	**7**	**14**	**2**
$-3\,x^2 + 2\,x - 12 = 0$	$-3\,x^2 + 2\,x - 12 = 0$	**– 3**	**2**	**– 12**
$33 - 3\,x^2 = 333\,x$	$-3\,x^2 - 333\,x + 33 = 0$	**– 3**	**– 333**	**33**
$\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{3}{11} + 7{,}2\,x = 0$	$\dfrac{x^2}{4} + 7{,}2\,x - \dfrac{3}{11} = 0$	$\dfrac{1}{4}$	**7,2**	$-\dfrac{3}{11}$
$18 + 4\,x^2 = 0$	$4\,x^2 + 18 = 0$	**4**	**0**	**18**
$x^2 = x$	$x^2 - x = 0$	**1**	**– 1**	**0**

2.1. Résoudre les équations en complétant le tableau :

Équation	Discriminant $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$	Solution(s)		
		Nombre	Calcul	
$x^2 - 5\,x + 6 = 0$	$(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$	**2**	$x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$	$x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$
$x^2 - 4\,x + 4 = 0$	$(-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$	**1**	$x = \dfrac{4}{2} = 2$	
$x^2 - x - 1 = 0$	$(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$	**2**	$x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	$x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
$2\,x^2 - 8x - 10 = 0$	$(-8)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 104$	**2**	$x_1 = \dfrac{8+\sqrt{104}}{4}$	$x_2 = \dfrac{8-\sqrt{104}}{4}$
$5\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$	$2^2 - 4 \times 5 \times 1 = -16$	**0**	**Pas de solution**	
$\dfrac{3x^2}{2} - 4\,x + 2{,}5 = 0$	$(-4)^2 - 4 \times \dfrac{3}{2} \times 2{,}5 = 1$	**2**	$x_1 = \dfrac{4+1}{3} = \dfrac{5}{3}$	$x_2 = \dfrac{4-1}{3} = 1$
$7\,x^2 + 14\,x + 2 = 0$	$14^2 - 4 \times 7 \times 2 = 140$	**2**	$x_1 = \dfrac{-14-\sqrt{140}}{14}$	$x_2 = \dfrac{-14+\sqrt{140}}{14}$

2.2. À l'aide de l'exercice 2.1, **factoriser** :

$x^2 - 5\,x + 6 = \mathbf{(}\ x - \mathbf{3}\ \mathbf{)}\ \mathbf{(}\ x - \mathbf{2}\ \mathbf{)}$

$x^2 - 4\,x + 4 = \mathbf{(}\ x - \mathbf{2}\ \mathbf{)}\ \mathbf{(}\ x - \mathbf{2}\ \mathbf{)} = \mathbf{(}\ x - \mathbf{2}\ \mathbf{)}^{\mathbf{2}}$

$2\,x^2 - 8x - 10 = \mathbf{2}\ \mathbf{(}\ x - \dfrac{\left(8+\sqrt{104}\right)}{4}\ \mathbf{)}\ \mathbf{(}\ x - \dfrac{\left(8-\sqrt{104}\right)}{4}\ \mathbf{)}$

$\dfrac{3x^2}{2} - 4\,x + 2{,}5 = \dfrac{3}{2}\ \mathbf{(}\ x - \dfrac{5}{3}\ \mathbf{)}\ \mathbf{(}\ x - \mathbf{1}\mathbf{)}$

$7\,x^2 + 14\,x + 2 = \mathbf{7}\ \mathbf{(}\ x - \dfrac{\left(-14+\sqrt{140}\right)}{14}\ \mathbf{)}\ \mathbf{(}\ x - \dfrac{\left(-14-\sqrt{140}\right)}{14}\ \mathbf{)}$

3. Problème :

M. Pillot, cascadeur professionnel, tente un nouveau défi : un saut à moto au dessus d'un alignement de voitures.

Il s'élance d'un tremplin de **3 m** de haut incliné à **26°** environ, à une vitesse de **72 km/h**.

L'équation de sa trajectoire, dans le repère indiqué, est : $y = -\dfrac{x^2}{64} + 0{,}5\,x + 3$.

À quelle distance du point **O**, doit-on placer le tremplin de réception de **2 m** de haut ?

On doit résoudre l'équation :

$$-\frac{x^2}{64} + 0{,}5\,x + 3 = 2$$

$$-\frac{x^2}{64} + 0{,}5\,x + 1 = 0$$

Calcul de Δ :

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$$

$$\Delta = 0{,}5^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{64}\right) \times 1$$

$$\Delta = 0{,}312\,5$$

Δ > 0 ; deux solutions distinctes.

Calcul des solutions :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = -\,1{,}89$ $x_2 = 33{,}89$

Il n'y a qu'une solution "physiquement" possible : il faudra placer le 2ème tremplin à 33,89 m du point O.