3. Résolution de l'équation sans second membre

On admettra le théorème suivant :

Théorème *Résolution de l'équation linéaire homogène du second ordre*

On considère l'équation

$$(E_0) \qquad ay'' + by' + cy = 0.$$

et son équation caractéristique associée $ar^2 + br + c = 0$. Le tableau ci-dessous donne les solutions de (E_0) en fonction du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

	Solutions de l'équation caractéristique associée	Solution générale de (E_0)
$\Delta = 0$	une racine double $r = -\dfrac{b}{2a} \in \mathbb{R}$	$y(x) = (Ax + B)e^{rx}$ où A et B sont des réels arbitraires.
$\Delta > 0$	2 racines réelles $r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où A et B sont des réels arbitraires.
$\Delta < 0$	2 racines complexes conjuguées	

■

Exercices

Exercice 1 : Vérifier qu'une fonction est solution particulière d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3xe^{-x} + 1.$$

Vérifier si la fonction f est ou non solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 2y' + y = 0$$

Exercice 2 : Vérifier qu'une fonction est solution particulière d'une équation différentielle

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (2x - 1)e^{-x}.$$

Vérifier si la fonction g est ou non solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 2y' + y = 0$$

Exercice 3 : Vérifier qu'une fonction est solution particulière d'une équation différentielle

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = 2e^{2x}(1 - 2x)$$

Vérifier si la fonction h est ou non solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 3y' + 2y = -4e^{2x}.$$

Exercice 4 : Une équation simple

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 2y' + y = 0$$

b) Déterminer la solution particulière y de (E) vérifiant en plus les conditions

$$y(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad y'(0) = 0$$

Exercice 5 : Une équation simple

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 3y' + 2y = 0$$

b) Déterminer la solution particulière y de (E) vérifiant en plus les conditions

$$y(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad y'(0) = 0$$

Exercice 6 : Une équation simple

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 3y' + 2y = 4.$$

1. a) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

b) Déterminer une solution particulière de (E).

c) En déduire la solution générale de (E).

2. Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant les 2 conditions :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 2.$$

Exercice 10 :

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 2y' + y = 1$$

où y désigne une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$.

1. Démontrer que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = 1$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle
$$(E_0) \qquad y'' + 2y' + y = 0$$
3. Déduire des questions précédentes la résolution de l'équation (E).
4. Déterminer la solution particulière de l'équation (E) qui vérifie
$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 3.$$

Exercice 12 : Équation différentielle du second ordre avec un polynôme

– Partie A –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 2x - 5$$

où y est une fonction définie et deux fois dérivable de la variable x.

1. Résoudre l'équation différentielle
$$(E_0) \qquad y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0$$
2. *a*) Déterminer les réels a et b tels que la fonction $x \mapsto ax + b$, notée g, soit une solution de (E).
   b) En déduire la solution générale de (E).
3. Déterminer la fonction f solution de (E) qui vérifie les conditions initiales
$$f(0) = -\frac{13}{4} \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 0.$$

Exercice 13 : Second ordre, avec une exponentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 4y' + 3y = e^{-2x}$$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$(E_0) \qquad y'' + 4y' + 3y = 0$$
2. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme Ae^{-2x} où A est un réel que l'on déterminera.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie les conditions initiales
$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 0.$$